

Министерство транспорта Российской Федерации  
Федеральное агентство железнодорожного транспорта

САМАРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра физика и экологическая теплофизика

Методические указания  
к выполнению лабораторных работ по физике

**«МЕХАНИКА и МОЛЕКУЛЯРНАЯ ФИЗИКА»**

САМАРА 2006

УДК 537

Методические указания к выполнению лабораторных работ по физике: «Механика и молекулярная физика» для студентов всех специальностей дневной и заочной форм обучения. Авторы: Абдульманов Р. Р., Шмаков В. М., Хохлова Н. Ю., Правосудов Н. Г. – Самара: СамГАПС, 2006 –с. 68.

Утверждено на заседании кафедры «Физика и ЭТ» 26 мая 2006 года, протокол №7  
Печатается по решению редакционно-издательского совета академии.

Содержит введение в измерительный практикум. Приведены краткие теоретические сведения, описания, методические указания, способы оценок погрешностей и контрольные вопросы по выполнению лабораторных работ по разделу «Механика».

Авторы:

Абдульманов Рафаэль Рахимович (введение, лабораторные работы: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10),  
Шмаков Вячеслав Михайлович (лабораторная работа 6),  
Хохлова Наталья Юрьевна (лабораторная работа 7),  
Правосудов Николай Геннадьевич (лабораторная работа 11).

Рецензент:

Редактор: Абдульманов Р. Р.

Компьютерная верстка: Абдульманов Р. Р.  
Подписано в печать                      Формат 60x84 1/16  
Бумага писчая. Печать оперативная. Усл. п. л.  
Тираж экз. 1000                      Заказ №

© Самарская государственная академия путей сообщения, 2006

## Оглавление

Введение .....	4
§1. Точность измерений. ....	4
Виды измерений. Абсолютная и относительная погрешность .....	4
Виды погрешностей измерения .....	5
Надежность результата многократных измерений. Коэффициент Стьюдента. ....	6
Расчет погрешности прямых измерений .....	7
Расчет погрешности косвенных измерений .....	8
Округление и запись результатов .....	8
§2. Графическая обработка результатов измерений.....	8
§3. Приборы для измерения линейных величин. ....	10
Линейка.....	10
Штангенциркуль .....	10
Микрометр. ....	10
§4. Оформление отчета по лабораторной работе. ....	11
Лабораторная работа № 1. Косвенный расчет плотности тел правильной геометрической формы. ....	12
Лабораторная работа № 2. Изучение законов поступательного движения на машине Атвуда.....	15
Лабораторная работа № 3. Изучение законов вращательного движение при помощи маятника Обербека. ....	19
Лабораторная работа № 4. Изучение сложного движения твердого тела с помощью маятника Максвелла.....	22
Лабораторная работа № 5. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника. ....	27
Лабораторная работа № 6. Проверка законов сохранения импульса и энергии при соударении тел. ....	30
Лабораторная работа № 7. Определение скорости полета «пули» при помощи крутильного маятника баллистическим методом .....	34
Лабораторная работа № 8. Определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса .....	39
Лабораторная работа № 9. Определение отношения теплоемкостей идеального газа методом Клемана - Дезорма .....	42
Лабораторная работа № 10. Определение модуля сдвига материала пружины с помощью пружинного маятника .....	46
Лабораторная работа № 11. Определение модуля Юнга по стреле прогиба прямоугольной пластины.....	50

## Введение

Физика - экспериментальная наука. Целью эксперимента является поиск таких параметров физических явлений, которые можно измерить, получив численные значения и сравнение их с предсказаниями проверяемой теории или гипотезы. Численное значение физической величины по результатам эксперимента может быть определено лишь с некоторой точностью. Отклонение результата измерения от "истинной" величины называется погрешностью или ошибкой измерения.

*Измерение какой-либо величины заключается в установлении ее численного значения (т. е. определение того, во сколько раз измеряемая величина больше (меньше) соответствующей величины, принятой за эталон) и погрешности (ошибки) измерения.*

Как правило, все результаты измерений записываются в **таблицу**, с обязательным указанием **единиц измерения**. В настоящее время в учебных заведениях России, рекомендовано использовать международную систему единиц измерения (СИ).

*При подстановке числовых значений в расчетные формулы все величины должны быть выражены в основных или производных единицах одной и той же системы единиц, что очень важно, так как только при этом условии в формулах не появятся коэффициенты, зависящие от выбора единиц.*

### §1. Точность измерений.

#### Виды измерений. Абсолютная и относительная погрешность.

Измерения могут быть **прямыми**, при которых значения физической величины находят непосредственным отсчетом по шкале измерительного прибора (измерение длины линейкой, температуры термометром) и **косвенными**, при которых значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, измеряемыми непосредственно (определение плотности тела по отношению массы к объему, определение сопротивления проводника по отношению разности потенциалов к току и т. д.).

В зависимости от числа проведенных измерений различают **однократные** и **многократные** измерения.

Многократные измерения могут быть **равноточными** и **неравноточными**. Равноточными называют измерения, выполненные с одинаковой точностью (например, одним и тем же прибором, при одинаковых условиях).

*Измерения могут быть прямыми и косвенными, однократными и многократными, равноточными и неравноточными, результаты измерений физических величин всегда являются приближенными числами. Многократные измерения записываются в таблицу с обязательным указанием единиц измерения.*

**Точность** проведенного измерений **не может превышать точность прибора**, которым проводилось измерение и характеризуется двумя основными параметрами: абсолютной и относительной погрешностями.

Для характеристики каждого конкретного измерения используют его **абсолютную погрешность**, т.е. модуль разности между истинным значением величины и ее значением, полученным в результате измерения:

$$\Delta x = |x_{ист} - x_{изм}| \quad [1.1]$$

На практике часто истинное значение неизвестно, поэтому приходится использовать вместо него арифметическое среднее из нескольких измерений, при этом сама **абсолютная погрешность также становится приближенным числом**.

Абсолютная погрешность не в полной мере характеризует результат измерения. Пусть, например, в результате измерений установлено, что длина стола равна  $L = (100 \pm 1)$  см, а толщина его крышки  $d = (2 \pm 1)$  см. Хотя абсолютная погрешность измерений в этих двух случаях одинакова, ясно, что качество измерений в первом случае выше.

Качество измерений характеризуется **относительной погрешностью**  $\varepsilon$ , равной отношению абсолютной погрешности к значению величины  $x_{изм}$ , получаемой в результате измерения:

$$\varepsilon = \Delta x / x_{изм} \quad [1.2]$$

**Абсолютная погрешность** [1.1] показывает, насколько истинное значение измеряемой величины отличается от измеренного значения.

**Относительная погрешность** [1.2] характеризует качество измерения, т.е. насколько верно подобрано соотношение измеряемой величины и абсолютной погрешности измерения.

## Виды погрешностей измерения

Погрешности измерений условно можно разделить на три основных вида:

- **Грубые ошибки (промахи)**
- **Систематические погрешности**
- **Случайные погрешности**

**Промах (грубая ошибка)** - погрешность, существенно превосходящая ожидаемое значение, в условиях данного измерения.

Промахи возникают из-за недостаточной внимательности и аккуратности, из-за неисправности приборов, неправильной записи результатов измерения и т. п. Почти всегда их можно выявить, повторяя измерения на другой аппаратуре, по другой методике или привлекая к измерению другого наблюдателя. Будем считать, что промахи своевременно выявляются и удаляются из результатов измерений.

**Систематическая погрешность** - погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторении измерений. Наиболее значимые причины возникновения систематических ошибок при лабораторных измерениях:

- Несовершенство измерительных приборов – **инструментальная погрешность**;
- Неполная разработка методики измерений, неполный учет условий опыта – **методическая погрешность**;

**Инструментальные (приборные) погрешности** вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов. Уменьшение инструментальной погрешности достигается применением более совершенных и точных приборов. Однако полностью устранить приборную погрешность невозможно.

Для характеристики большинства измерительных приборов используют понятие приведенной погрешности (**класса точности**).

Приведенная погрешность  $E_n$  – это отношение абсолютной погрешности к предельному значению  $x_{max}$  на шкале прибора:

$$E_n = \frac{\Delta x}{x_{max}} 100\% \quad [1.3]$$

По приведенной погрешности приборы подразделяются на **семь классов: 0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 1.5; 2.5; 4**. Приборы класса точности – 0.1; 0.2; 0.5 применяют для точных лабораторных измерений (прецизионных). В технике применяют приборы классов – 1.0; 1.5; 2.5; 4 (технические). Класс точности указывается на шкале прибора.

Из формулы [1.3] следует, что относительная погрешность будет минимальной, если измеряемая величина дает отброс стрелки индикатора на всю шкалу.

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления.

Для оптимального использования прибора его предел выбирают так, чтобы значение измеряемой величины попадало в конец шкалы.

Если класс точности прибора не указан, то принято считать инструментальную погрешность равной половине цены деления шкалы прибора. Как правило, цена деления шкалы приборов согласована с инструментальной погрешностью.

**Методические погрешности** вызываются недостатками применяемого метода измерений, несовершенством теории физического явления и неточностью расчетной формулы, используемой для нахождения измеряемой величины. Сюда же можно отнести погрешности связанные с неполным учетом условий опыта.

*Методические погрешности можно уменьшать путем совершенствования метода измерений, а также введения уточнений в расчетную формулу.*

**Погрешность взвешивания.** При прямом измерении массы на весах инструментальную погрешность можно принять равной:

$$\Delta_u = m_{\min} / 2 \quad [1.4]$$

Например, тело уравновешено на весах при помощи гирь, номинальные (указанные на гирях) значения которых равны 50 г, 20 г, 100 мг и выводятся из равновесия разновесом в 10 мг. Следовательно, абсолютная погрешность взвешивания:  $m = 70,100 \pm 0,005$  г.

*Погрешность взвешивания, при обычных (не прецизионных) измерениях, выбирается равной половине массы наименьшей гири, лежащей на весах (либо выводящей ее из равновесия).*

**Случайная погрешность** - погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторении равнозначных измерений, и вызвано действием случайных факторов, которые невозможно устранить.

*Для уменьшения случайных погрешностей увеличивают количество опытов и в качестве результата используют среднее значение. При этом происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений в сторону завышения и в сторону занижения.*

### **Надежность результата многократных измерений. Коэффициент Стьюдента.**

**Доверительной вероятностью или надежностью  $P$**  серии измерений называется вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в данный интервал (выражается в долях единицы или в процентах).

Интервал ( $\langle x \rangle \pm \Delta x$ ) в который попадает истинное значение искомой величины с заданной доверительной вероятностью  $P(\Delta x)$ , называют **доверительным интервалом или интервалом надежности** и для краткости обозначают как  $\Delta x$ .

Чем больше доверительный интервал, тем больше доверительная вероятность того, что результат измерения попадет в него. Величина доверительного интервала, рассчитывается методами теории вероятностей и математической статистики и определяется выбором вида функции распределения случайных величин  $f(\Delta x)$ .

Для всех функций распределения, базовым является **распределение Гаусса**, справедливое для большого количества **равноточных** измерений ( $n \rightarrow \infty$ ):

$$f(\Delta x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad [1.5]$$

где величина  $\sigma$  называется **среднеквадратичным или стандартным отклонением**  $x_i$  от среднего значения  $\langle x \rangle$  а,  $\sigma^2$  **дисперсией распределения**.

Распределение Гаусса показывает, что вероятность появления малых случайных погрешностей больше вероятности появления больших погрешностей, при этом случайные погрешности равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку встречаются одинаково часто.

При лабораторных измерениях ( $n < 20$ ) для расчета интервала надежности используется **распределение Стьюдента** (при  $n \rightarrow \infty$  распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса), которое позволяет по заданной величине надежности  $P(\Delta x)$  найти величину доверительного интервала  $\Delta x$ , с помощью поправочных коэффициентов Стьюдента:

$$\Delta x = t_{p,n} S \quad [1.6]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора доверительной вероятности  $p$  и числа измерений  $n$ ,  $S$  – среднеквадратичное отклонение – (СКО), вычисляемое по формуле:

$$S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}} \quad [1.7]$$

Величина интервала  $\Delta x$ , рассчитанная при помощи формулы [1.6] стремится к нулю при увеличении числа опытов.

### Коэффициенты Стьюдента $t_{p,n}$

Число измерений $n$	Доверительная вероятность (надежность), $p$			
	0,90	0,95	0,99	0,999
2	6,314	12,706	63,657	636,619
3	2,920	4,303	9,925	31,598
4	2,353	3,182	5,841	12,941
5	2,132	2,776	4,604	8,610
6	2,015	2,571	4,032	6,859
7	1,943	2,447	3,707	5,959
8	1,895	2,365	3,499	5,405
9	1,860	2,306	3,355	5,041
10	1,833	2,262	3,250	4,781

Очевидно, что число опытов имеет смысл выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего сравнялась с погрешностью прибора либо стала меньше ее. Дальнейшее увеличение числа измерений теряет смысл, так как не увеличит точность получаемого результата

### Расчет погрешности прямых измерений

Прежде, чем приступить к измерениям, необходимо предварительно определить пределы точности данных приборов (инструментальные погрешности  $\Delta_u$ ).

Равноточные измерения любой физической величины делаются не менее трех раз и заносятся в таблицу, с учетом инструментальной погрешности. В зависимости от поведения значений результатов измерения, возникают две различные схемы:

#### Случайная погрешность много меньше инструментальной

Если оказывается, что все время получается один и тот же результат (нет разброса), то в качестве интервала надежности берется стандартная (*инструментальная*) погрешность прибора  $\Delta_u$ , рассчитанная по его классу точности (или погрешность градуировки прибора) и результат записывается в виде:

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta_u$$

При этом доверительная вероятность (надежность) равна  $p(\sigma) = 0.68$  и, как правило, не указывается.

#### Случайная погрешность сравнима с инструментальной

Если разброс значений физической величины  $x$  превышает погрешность градуировки, то количество измерений  $n$  увеличивают до тех пор, пока они не окажутся величинами одного порядка. Интервал надежности вычисляют в следующей последовательности:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

1. Находят среднее значение:
2. Оценивают среднеквадратичное отклонение - СКО:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}$$

- По заданному значению надежности  $p$  и числу измерений  $n$ , находят случайную составляющую погрешности:  $\Delta x_{сл} = t_{n,p} \cdot S$
- Полную погрешность вычисляют как корень квадратный из суммы квадратов случайной  $\Delta x_{сл}$  и инструментальной  $\Delta x_{и}$  составляющих:
 
$$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_{и})^2 + (\Delta x_{сл})^2}$$

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{\langle x \rangle}$$
- Находят относительную погрешность:
- Результат записывают в виде:  $x = \langle x \rangle \pm \Delta x$ ,  $\varepsilon_x = \dots$ ,  $p = \dots$

### Расчет погрешности косвенных измерений

- Повторяют пункты 1 – 5 предыдущего параграфа для всех физических величин  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ , входящих в рабочую формулу.
- Среднее значение  $\langle y \rangle$  результата косвенного измерения вычисляют, подставив в рабочую формулу средние значения  $\langle x_i \rangle$  всех прямых измерений:
 
$$\langle y \rangle = f(\langle x_1 \rangle, \langle x_2 \rangle, \langle x_3 \rangle, \dots, \langle x_k \rangle)$$
- Относительная погрешность  $\varepsilon_y$  может быть вычислена по формуле (где  $\Delta x_i$  – абсолютная погрешность прямого измерения величины  $x_i$ ):
 
$$\varepsilon_y \approx \sum \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \ln f(x_1, x_2, \dots, x_n) \Delta x_i \right)$$
- Интервал надежности  $\Delta y$  косвенного результата измерения можно вычислить по среднему значению  $\langle y \rangle$  и величине общей относительной погрешности  $\varepsilon_y$ , найденной на предыдущем шаге:  $\Delta y = \langle y \rangle \varepsilon_y$
- Результат записывают в виде:  $y = \langle y \rangle \pm \Delta y$ ,  $\varepsilon_y = \dots$ ,  $p = \dots$

### Округление и запись результатов

Округление результатов измерений следует начинать с округления погрешности. В окончательном виде в погрешности принято оставлять одну или две значащие цифры (остальные округляются). Две значащие цифры в погрешности приводят только при особо точных измерениях, а также, если старшая цифра  $\leq 3$ . Если старшая цифра  $> 3$ , то в погрешности оставляют только одну (старшую) цифру, округляя остальные. Результаты измерения округляют с точностью «до погрешности», т.е. последняя значащая цифра в результате должна находиться в том же разряде, что и в погрешности.

*При записи результата обязательно указывают относительную погрешность и доверительную вероятность  $p$ , с которой вычислялся интервал надежности  $\Delta x$ .*

$$x = \langle x \rangle \pm \Delta x, \quad \varepsilon = \Delta x / \langle x \rangle, \quad p = \dots$$

### §2. Графическая обработка результатов измерений.

При измерениях физических величин часто удобно проводить измерения графическим методом, определяя из графиков некоторые их параметры.

*Для линейных зависимостей обычно из графика определяют тангенс угла наклона и координаты точек пересечения с осями.*

Графики желательно строить на листах миллиметровой бумаги. Масштаб графика по обеим осям нужно выбирать так, чтобы предполагаемые зависимости обладали наибольшей наглядностью и заполняли большую часть поля. Как правило, при использовании равномерных шкал, сетка графика должна быть квадратной.

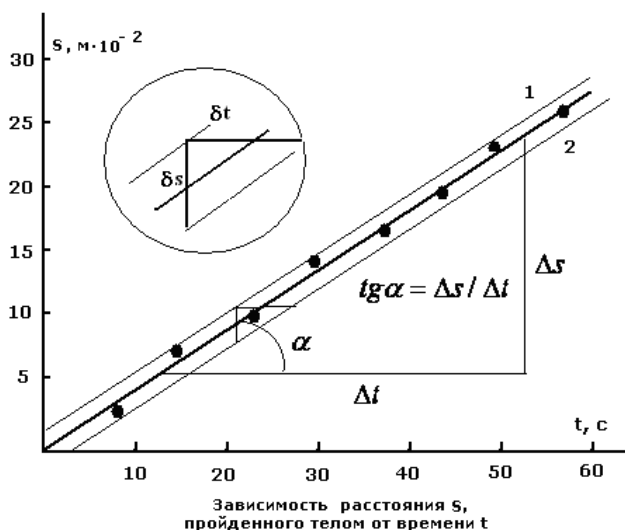


Рекомендуется использовать масштабы 1:1; 1:10; и т. д., 1:2; 1:20; и т. д., 1:5; 1:50 и т. д. Эти масштабы наиболее удобны для пересчета измеряемых величин в единицы длины, откладываемые по осям.

Стрелки на концах осей графика, как правило, не ставят, но обязательно указывают обозначения физических величин, и единицы их измерения. Если значения физической величины содержат множители  $10^n$ , то их относят к единице измерения. Учитывая, что миллиметровая бумага имеет очень мелкую сетку, на график следует нанести только крупную сетку. Надписывают лишь деления крупной сетки. Каждый график снабжают пояснительной подписью.

Для нанесения опытных точек используют условные обозначения: светлые и темные кружки, квадратики, треугольники, крестики и т. п. При построении графиков следует иметь в виду, что по результатам опытов мы получаем не точку, а прямоугольник со сторонами  $\delta s$  и  $\delta t$ . Поэтому необходимо проводить **плавную** линию так, чтобы примерно одинаковое число точек, оказалось, по разные стороны от кривой.

Если предполагаемая зависимость – линейная, то удобно проводить линию при помощи прозрачной линейки. Однако, наилучшие результаты, получаются при применении **метода наименьших квадратов (МНК)** для предварительного расчета параметров проводимой прямой линии.



### Определение тангенса угла наклона проведенной линии:

1. Проводим, с помощью прозрачной линейки, прямую линию, как указано выше.
2. На графике (см. рис.) выделяем прямоугольный треугольник со сторонами:  $\Delta s$  и  $\Delta t$ , гипотенузой которого является часть проведенной прямой или параллельной ей линии.
3. Находим тангенс угла наклона прямой

$$\operatorname{tg} \alpha = \Delta s / \Delta t \quad [2.1]$$

### Оценка погрешности, проведенной линии:

1. Провести две линии, параллельно построенной – одну над ней (1) и другую под ней (2), так, чтобы они прошли по крайним экспериментальным точкам
2. Найти по графику наибольшие значения расстояний между ними  $\delta s$  и  $\delta t$ , перемещая линейку параллельно горизонтальной и вертикальной осям, соответственно
3. Среднеквадратичные отклонения (СКО) для ординаты  $y$  и абсциссы  $x$  принять равными:

$$S_y = \delta s / 2\sqrt{n} \quad \text{и} \quad S_x = \delta t / 2\sqrt{n}, \quad [2.2]$$

соответственно, где  $n$  – число экспериментальных точек.

Доверительные интервалы во всех случаях вычисляются обычным способом:

$$\Delta b = t_{p,n} S_b \quad \Delta a = t_{p,n} S_a \quad [2.7]$$

### §3. Приборы для измерения линейных величин.

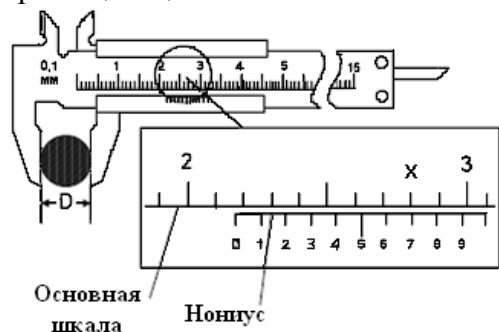
#### Линейка

Всем известная линейка пригодна для измерения размеров самых разнообразных тел. Однако по ней можно отсчитать только целое число миллиметров. А миллиметр при современных точностях обработки стал весьма большой единицей длины, поэтому линейку применяют только для грубых измерений. Совмещение двух линеек в более совершенном инструменте - *штангенциркуле* позволяет измерить размеры с точностью до 0,1 мм



#### Штангенциркуль.

Штангенциркуль состоит из *основной шкалы*. -линейки с миллиметровыми делениями и перемещающейся по ней *подвижной рамки*. Измеряемый предмет зажимают между губками. По



Результат измерения  
 $D = 21,70 + 0,05 \text{ мм}$

штрихам основной шкалы прочитывают целое число миллиметров. К рамке прикреплена маленькая линейка - *нониус* - с десятью делениями, которые равны *деяти делениям основной шкалы*, т. е. каждое деление нониуса на 0,1 мм меньше деления основной шкалы. По штрихам нониуса определяют, на сколько десятых долей миллиметра измеряемый размер превышает целое число миллиметров. Для этого устанавливают, какой из штрихов нониуса совпал со штрихом основной шкалы.

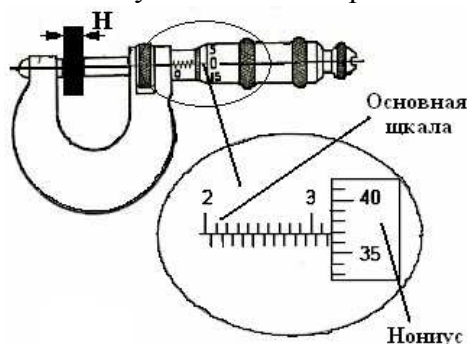
**Внимание!** Запрещается перемещать подвижную рамку за пределы штанги во избежание потери плоской

пружины.

При внутренних измерениях к показаниям штангенциркуля по основной и нониусной шкалам прибавляется толщина губок, которая указана на них.

#### Микрометр.

Главная деталь микрометра - точный *микрометрический винт*, ввернутый в гайку, называемую *стеблем*. При одном обороте винт перемещается вдоль своей оси на 0,5 мм. На



Результат измерения  
 $H = 31,87 + 0,005 \text{ мм}$

винте неподвижно насажен барабан, на котором по окружности нанесено 50 делений. Таким образом, поворот винта на одно деление равен 1/50 полного оборота, или 0,01 мм ( $0,5\text{мм}/50 = 0,01 \text{ мм}$ ). Вращая барабан, зажимают измеряемую деталь между винтом и пяткой скобы и производят отсчет. Сначала по верхней шкале стебля определяют, сколько миллиметров, начиная от первого штриха, прошел барабан. Если барабан перешел штрих на нижней шкале стебля, определяющей полумиллиметры, то это означает, что дробная часть размера больше 0,5 мм. А на сколько размер детали превышает целое число полумиллиметров, устанавливают по тому штриху барабана, который совпадает с продольной линией на стебле.

#### **§4. Оформление отчета по лабораторной работе.**

Лабораторные работы оформляются на двойном тетрадном листе из четырех страниц. Содержание отдельных страниц отчета:

**Первая страница** – титульная. Должна включать: номер и полное название лабораторной работы, кто выполнял (Ф. И. О. студента, номер группы), дата выполнения.

**Вторая страница** – описание работы. Включает: цель работы, перечень оборудования и принадлежностей, рисунки, основные и расчетные формулы.

**Третья страница** – результаты работы. Многократные измерения всех физических величин должны быть представлены в виде таблицы. Все необходимые вспомогательные вычисления выполняются на черновиках и не входят в отчет. Итоговый результат должен быть представлен в виде отдельной строки под таблицей измерений (как правило, с указанием доверительного интервала, надежности и относительной погрешности). Графики строятся на отдельных листах и вкладываются в отчет.

**Четвертая страница** – выводы и обсуждение результатов. Необходимо подготовить устные или письменные *ответы по всем контрольным вопросам, к данной лабораторной работе.*

## Лабораторная работа № 1. Косвенный расчет плотности тел правильной геометрической формы.

**Цель работы:** Научиться рассчитывать погрешности прямых и косвенных измерений, научиться использовать рычажные весы и приборы для измерений линейных размеров тел, на примере определения плотности тел правильной геометрической формы.

### 1. Теоретическое введение

Плотностью элементарной части тела называется предел отношения элементарной массы  $\Delta m$  к элементарному объему  $\Delta V$ , при  $\Delta V \rightarrow 0$ :

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V} = \frac{dm}{dV} \quad [1]$$

Для однородного тела ( $\rho = const$ ) определение плотности сводится к нахождению отношения его массы к объему:  $\rho = m/V$ .

**Внимание!** Для экспериментального определения плотности тел правильной геометрической формы (цилиндр и параллелепипед) в данной работе необходимо предварительно провести прямые измерения их линейных размеров и массы, **пользуясь рекомендациями, приведенными во введении §1. Раздел: «Расчет погрешности прямых измерений».**

*Доверительной вероятностью (надежностью)  $P(\Delta x)$  серии измерений называется вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в данный интервал (выражается в долях единицы или в процентах).*

*Интервал ( $\langle x \rangle \pm \Delta x$ ) в который попадает истинное значение искомой величины с заданной доверительной вероятностью, называют доверительным интервалом (интервалом надежности).*

#### Определение плотности цилиндра.

Плотность однородного цилиндрического тела можно рассчитать по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\pi \cdot d^2 h / 4} = \frac{4m}{\pi \cdot d^2 h}, \quad [2]$$

где  $d$  – диаметр цилиндра,  $h$  – его высота.

Для нахождения относительной погрешности косвенного определения плотности цилиндра, прологарифмируем расчетную формулу:

$$\ln \rho = \ln \pi / 4 + \ln m + 2 \ln d + \ln h$$

и возьмем дифференциал. Заменяя дифференциалы приращениями, получим:

$$\frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} = \frac{\Delta m}{\langle m \rangle} + 2 \frac{\Delta d}{\langle d \rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} \quad \text{или} \quad \varepsilon_\rho \approx \varepsilon_m + 2\varepsilon_d + \varepsilon_h, \quad [3]$$

где  $\langle m \rangle, \langle d \rangle, \langle h \rangle$  – средние значения массы, диаметра и высоты, найденные в результате прямых измерений, соответственно, а  $\varepsilon_m, \varepsilon_d, \varepsilon_h$  – относительные погрешности их прямых измерений.

Среднее значение плотности можно найти, подставляя в расчетную формулу [2] средние значения массы, диаметра и высоты:

$$\langle \rho \rangle = \frac{4 \langle m \rangle}{\pi \langle d \rangle^2 \langle h \rangle} \quad [4]$$

#### Определение плотности параллелепипеда.

Плотность однородного тела в форме параллелепипеда можно рассчитать по формуле:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{l \cdot d \cdot h}, \quad [5]$$

где  $l$  – длина тела,  $d$  – ширина тела,  $h$  – его высота. Действуя аналогично предыдущему случаю, находим:

$$\frac{\Delta\rho}{\langle\rho\rangle} = \frac{\Delta m}{\langle m\rangle} + \frac{\Delta l}{\langle l\rangle} + \frac{\Delta d}{\langle d\rangle} + \frac{\Delta h}{\langle h\rangle} \quad \text{или} \quad \varepsilon_\rho \approx \varepsilon_m + \varepsilon_l + \varepsilon_d + \varepsilon_h, \quad [6]$$

где  $\langle m \rangle, \langle l \rangle, \langle d \rangle, \langle h \rangle$  – средние значения массы, длины, ширины и высоты, найденные в результате прямых измерений, соответственно, а  $\varepsilon_m, \varepsilon_l, \varepsilon_d, \varepsilon_h$  – относительные погрешности их прямых измерений.

Среднее значение плотности:

$$\langle\rho\rangle = \frac{\langle m\rangle}{\langle l\rangle \langle d\rangle \langle h\rangle} \quad [7]$$

**Интервал надежности**  $\Delta\rho$  при определении плотности во всех случаях, можно вычислить по формуле:

$$\Delta\rho = \varepsilon_\rho \langle\rho\rangle \quad [8]$$

где  $\varepsilon_\rho$  – относительная погрешность определения плотности, вычисляемая по формуле [3] для цилиндра, или по формулу [6] для параллелепипеда.

Результат записывается в виде:

$$\rho = (\langle\rho\rangle \pm \Delta\rho), \quad \text{при } p = \quad, \quad \varepsilon_\rho = \Delta\rho / \langle\rho\rangle, \quad [9]$$

где величина надежности  $p$  принимается равной наименьшей надежности прямых измерений массы и линейных размеров.

## 2. Выполнение работы

### Приборы и принадлежности:

1. Тела для измерения (цилиндр и параллелепипед)
2. Весы и разновесы
3. Штангенциркуль
4. Микрометр

При всех расчетах принять:  $p = 0,95$

1. Ознакомиться с устройством и принципом действия штангенциркуля и микрометра, научиться взвешивать тела с помощью рычажных весов.
2. Определить инструментальные погрешности измерения для каждой измеряемой величины и внести в строку  $\Delta_n$  в заголовке таблицы, под соответствующей величиной.
3. Провести прямые измерения (не менее 3-х раз) всех линейных размеров и массы тел, в указанных в таблице единицах измерения, результаты измерений заносить в верхнюю часть таблицы, в строку, соответствующую номеру опыта.

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

4. Рассчитать, по формуле:  $\langle x \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ , средние арифметические значения всех измеренных величин и занести в соответствующую строку, в нижней части таблицы, в соответствующем столбце.

5. Рассчитать, по формуле:  $S = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \langle x \rangle)^2}{n(n-1)}}$ , среднеквадратичные отклонения (СКО)

каждой величины и занести в соответствующую строку, в нижней части таблицы, в соответствующем столбце.

6. Рассчитать, по формуле:  $\Delta x_{cl} = t_{n,p} \cdot S$ , случайную погрешность измерения каждой величины и занести в соответствующую строку, в нижней части таблицы, в соответствующем столбце.
7. Рассчитать, по формуле:  $\Delta x = \sqrt{(\Delta x_u)^2 + (\Delta x_{cl})^2}$ , полную погрешность каждой величины и занести в соответствующую строку, в нижней части таблицы, в соответствующем столбце.
8. Рассчитать, по формуле:  $\varepsilon_x = \Delta x / \langle x \rangle$ , относительные ошибки измерения каждой величины и занести в строку  $\varepsilon$ , в нижней части таблицы, в соответствующем столбце.
9. По формулам [3], [4], [8] (для цилиндра) или [6], [7], [8] (для параллелепипеда) рассчитать среднюю плотность и интервал надежности и округленный результат записать в строку  $\rho$ , в последней строке таблицы, в соответствующем столбце.
10. Сравнить полученные значения плотности с табличными значениями плотностей твердых тел, и определить из какого вещества могут быть изготовлены опытные образцы.

**Таблица результатов**

№ опыта	Величина	Цилиндр			Параллелепипед			
		m, г	d, мм	h, мм	m, г	l, мм	d, мм	h, мм
		$\Delta_{и}$						
1								
2								
3								
$\langle x \rangle$								
$S$								
$\Delta x_{cl} = t_{n,p} \cdot S$								
$\Delta x = \sqrt{(\Delta x_u)^2 + (\Delta x_{cl})^2}$								
$\varepsilon_x = \Delta x / \langle x \rangle$								
$\rho = (\langle \rho \rangle \pm \Delta \rho)$ , кг/м <sup>3</sup>		$\rho =$ , при $p =$ , $\varepsilon_\rho =$ ,		$\rho =$ , при $p =$ , $\varepsilon_\rho =$ ,				

### Контрольные вопросы

1. Виды и источники погрешностей измерения.
2. Каковы инструментальные погрешности линейки, штангенциркуля и микрометра?
3. Как перевести плотность, выраженную в г/мм<sup>3</sup> в кг/м<sup>3</sup>?
4. Чем характеризуется точность измерения?
5. Что называют доверительной вероятностью (надежностью) и доверительным интервалом (интервалом надежности) результата измерения?
6. Как использовать таблицу коэффициентов Стьюдента для расчета доверительного интервала по заданной надежности?
7. Как рассчитать погрешность прямого измерения массы и линейных размеров тел?
8. Как рассчитать погрешность косвенного измерения плотности цилиндра, параллелепипеда?
9. Как округлять и правильно записать результат измерений?

**Литература** Введение к данному пособию §1, §3.

## Плотность некоторых металлов и сплавов (18<sup>0</sup>С)

Металл или спла	$\rho \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$	Металл или спл	$\rho \cdot 10^3 \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$
Алюминий	2,7	Медь	8,96
Бронза	8,7-8,9	Нихром	8,1-8,4
Вольфрам	19,3	Свинец	11,35
Дюралюминий	2,7-2,9	Серебро	10,5
Железо	7,88	Сталь	7,7-7,9
Золото	19,32	Цинк	7,15
Латунь	8,3-8,7	Чугун	7,0

### Лабораторная работа № 2. Изучение законов поступательного движения на машине Атвуда

**Цель работы:** Проверка законов кинематики и динамики прямолинейного равноускоренного движения тел с помощью машины Атвуда.

#### 2. Теоретическое введение

**Материальная точка** – тело, размерами которого можно пренебречь, в условиях данной задачи. Для описания положения материальной точки в каждый момент времени, необходимо выбрать **систему отсчета** – совокупность таймера, тела отсчета и жестко связанную с ним систему координат. В общем случае движение материальной точки, в выбранной системе отсчета, описывается мгновенным значением радиус-вектора или координат (кинематическими уравнениями движения):

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \text{ или: } x = x(t); y = y(t); z = z(t)$$

Линия, описываемая движущейся в пространстве точкой, называется **траекторией**, которая может быть **прямолинейной** или **криволинейной**.

Длина участка траектории, пройденного телом за промежуток времени  $t$  называется **длиной пути**  $\Delta S > 0$  и является скалярной функцией от времени:  $\Delta S = \Delta S(t)$ .

Вектор, проведенный из начального положения движущейся точки в положение ее в данный момент времени, называется **перемещением**  $\Delta \vec{r}$ . При прямолинейном **равномерном** движении модуль перемещения равен пройденному пути  $|\Delta \vec{r}| = \Delta S$

Для характеристики движения вводится векторная величина – скорость  $\vec{V}$ . Вектором средней скорости называется отношение перемещения точки  $\Delta \vec{r}$  к промежутку времени  $\Delta t$ , за который это перемещение произошло:

$$\langle \vec{V} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad [1]$$

При  $\Delta t \rightarrow 0$  средняя скорость стремится к предельному значению – производной перемещения по времени, которое называется **мгновенной скоростью**  $\vec{V}$ :

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad [2]$$

Если скорость не изменяется с течением времени ( $\vec{V} = \text{const}$ ), то движение называется **равномерным**. В этом случае (при движении тела вдоль оси  $x$ ):

$$x = x_0 + Vt, \quad [3]$$

где  $x_0$  - координата точки в начальный момент времени.

При неравномерном движении, аналогично [1] и [2], вводят понятие векторов **среднего**  $\langle \vec{a} \rangle$  и мгновенного **ускорения**  $\vec{a}$ :

$$\langle \vec{a} \rangle = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \quad \text{и} \quad \vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \quad [4]$$

Если ускорение не изменяется во времени ( $\vec{a} = const$ ), то движение называется **равноускоренным**. В этом случае (при прямолинейном движении тела вдоль оси  $x$ ):

$$V = V_0 + at \quad \text{и} \quad x = x_0 + V_0 t + \frac{at^2}{2} \quad [5]$$

где  $x_0$  и  $V_0$  - координата и скорость точки в начальный момент времени  $t = 0$ .

Состояние движения тела (скорость и ускорение) может измениться только в результате взаимодействия с другими телами, мерой которого является вектор силы  $\vec{F}$ , и может быть установлено, при помощи **законов Ньютона**:

1. Всякое тело находится в состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока векторная сумма, действующих на него сил равна нулю, т. е.:

$$\text{а.} \quad \vec{V} = const, \quad \text{если} \quad \vec{F}_{\text{рез}} = \sum \vec{F}_i = 0 \quad [6]$$

2. Ускорение, приобретаемое телом, прямо пропорционально векторной сумме сил, действующих на него, и обратно пропорционально массе тела (где  $\vec{p} = m\vec{V}$  - импульс тела,  $m = const$ ):

$$\text{а.} \quad \vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{рез}}}{m} \quad \text{или} \quad \vec{F}_{\text{рез}} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{V}}{dt} = \frac{d(m\vec{V})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \quad [7]$$

3. Все тела, при взаимодействии друг с другом, действуют друг на друга с равными по величине и противоположно направленными силами:

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad [8]$$

### Описание установки и расчетные формулы.

Для проверки законов прямолинейного движения в данной работе используется машина Атвуда, схема которого изображена на рис. 1.

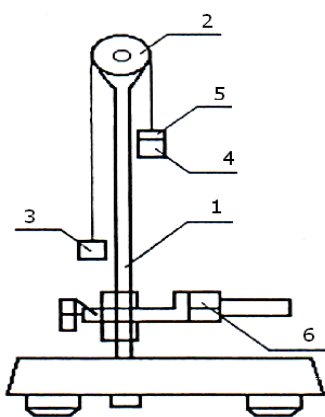


Рис. 1

Машина Атвуда состоит из укрепленного на штативе 1 блока 2, через который перекинута нить с подвешенными на ней одинаковыми грузами 3 и 4. Масса этих грузов может быть увеличена добавочными небольшими грузами (перегрузками) 5. На верхнем кронштейне установлен также электромагнитный тормоз, предназначенный для фиксации исходного положения грузов. Установка работает от блока электронного ФМ 1/1, на передней панели которого расположено табло электронного секундомера, соединенного с фотодатчиком 6.

При одинаковой массе  $M$  грузов 3 и 4 система находится в состоянии безразличного равновесия. Если на груз 4 положить перегрузок 5 (массы  $m$ ), то вся система начнет двигаться равноускоренно, с

ускорением  $\vec{a}$ .

На груз 3 и груз 4 с перегрузком 5 будут действовать две силы: сила тяжести и сила натяжения нити (рис.2). При этом, если масса блока невелика по сравнению с массой груза  $M$  и трение мало, то раскручивание блока практически не требует приложения к нему крутящего момента, и силы натяжения нити по обе стороны блока равны.

Применив второй закон Ньютона к каждому грузу можно записать уравнения движения системы (все силы, направленные так же как вектор ускорения, считаем положительными):

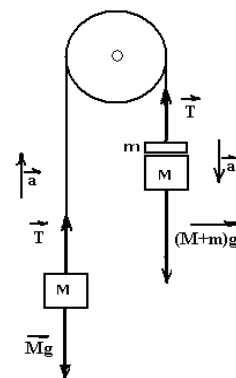


Рис. 2



$$\begin{cases} (M + m)a = (M + m)g - T; \\ Ma = T - Mg, \end{cases}$$

где  $a$  – ускорение системы,  $T$  – натяжение нити,  $g$  – ускорение свободного падения.

Решение системы уравнений дает:

$$a = a_T = \frac{mg}{2M + m} \quad [9]$$

С другой стороны, полагая в [5]  $x - x_0 = h$  и  $V_0 = 0$ , находим:

$$a_s = 2h/t^2 \quad \text{или} \quad h = t^2 \cdot tg\alpha \quad [10]$$

где  $tg\alpha = a_s/2$ , коэффициент пропорциональности между  $t^2$  и величиной перемещения грузов  $h$  (тангенс угла наклона графика функции  $h = f(t^2)$ , см. Введение, §1).

Теоретическое значение ускорения грузов, рассчитанное по формуле [9], можно сравнить с экспериментальным значением [10].

Изменяя величину перемещения грузов  $h$  и измеряя время движения  $t$ , находим ряд точек  $(h_i; t_i)$ . Строим точки на графике  $h = f(t^2)$ , откладывая по горизонтальной оси  $t^2$ , по вертикальной оси  $h$ . **Если кинематическое уравнение [10] выполняется, то экспериментальные точки должны хорошо ложиться на прямую линию, исходящую из начала координат.**

Следуя рекомендациям по графическому определению параметров прямой линии, приведенным во введении в разделе «Графическая обработка результатов измерений», проводим наилучшую прямую, определяем тангенс угла ее наклона к горизонтальной оси и находим величину экспериментального ускорения грузов  $\langle a_s \rangle$ :

$$\langle a_s \rangle = 2 \cdot tg\alpha \quad [11]$$

Интервала надежности полученного значения  $\langle a_s \rangle$  (рис. 3) можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения, зная инструментальную погрешность определения расстояния  $h$  (миллиметровая линейка,  $\Delta_h = 0,5$  мм) и погрешность определения времени  $t$  (электронный таймер,  $\Delta_t = 0,001$  с):

$$\Delta a_s \approx t_{p,n} \left( \frac{\Delta_h}{h} + 2 \frac{\Delta_t}{t} \right) \langle a_s \rangle \quad [12]$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора интервала надежности (доверительной вероятности)  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $a_s = \langle a_s \rangle \pm \Delta a_s$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнение работы.

### Приборы и принадлежности:

1. Машина Атвуда с фотодатчиком и таймером
2. 2 груза на нити, добавочные грузы.

Перед началом работы отрегулируйте положения основания при помощи регулировочных опор, используя для визуального наблюдения в качестве отвеса нить с грузами так, чтобы груз 4 с дополнительными грузами 5 при опускании проходил по центру рабочего окна фотодатчика.

1. Определить массы грузов  $M$  и перегрузов  $m_1$  и  $m_2$ . Перекинуть через блок 2 нить с двумя грузами массой  $M$  каждый и убедиться, что система находится в положении безразличного равновесия.

- Установить правый груз в крайнем верхнем положении и нажать кнопку «СЕТЬ» электронного блока, для включения и фиксации стартового состояния.
- Положить на правый груз 4 добавочный груз (перегруз)  $m_1$ . Определить по шкале пройденный грузом путь как расстояние от нижней плоскости груза в верхнем положении до оптической оси фотодатчика.
- Нажать кнопку «ПУСК» блока и записать пройденный грузом путь  $h$  и время движения грузов  $t$  в соответствующий столбец таблицы.
- Повторить измерения 5 раз, изменяя высоту подъема груза в верхнем положении.
- Построить график  $h = f(t^2)$  и найти среднее значение  $\langle a_g \rangle$  как тангенс угла наклона построенной прямой линии по формуле [11] и оценить интервал надежности  $\Delta a_g$  по формуле [12] (полагая  $h = h_{\max} / 2$  и  $t = t_{\max} / 2$ , где  $h_{\max}$  и  $t_{\max}$  - наибольшие их значения в таблице).
- Рассчитать теоретическое ускорение грузов по формуле [10] и рассчитать относительную погрешность экспериментального и теоретического значений по формуле:
 
$$\varepsilon = \frac{a_T - \langle a_g \rangle}{a_T} 100\%$$
- Повторить измерения и расчеты п.п. 3-7 с другим добавочным грузом (перегрузом) –  $m_2$ .

### Таблица результатов

№ опыта	Перегрузок $m_1 =$			Перегрузок $m_2 =$		
	$h, \text{ мм}$	$t, \text{ с}$	$\langle a_g \rangle$	$h, \text{ мм}$	$t, \text{ с}$	$\langle a_g \rangle$
1						
2						
3						
4						
5						
$a_g = \langle a_g \rangle \pm \Delta a_g$	$a_g =$ ; $p =$			$a_g =$ ; $p =$		
$a_T = mg / (2M + m)$	$a_T =$			$a_T =$		
$\varepsilon, \%$	$\varepsilon =$			$\varepsilon =$		

### Контрольные вопросы.

- Материальная точка, система отсчета, система координат.
- Траектория, путь и вектор перемещения материальной точки.
- Вектора средней и мгновенной скорости и ускорения точки.
- Какое движение называется равномерным? Равноускоренным? Зависимость  $V(t)$  и  $x(t)$  при равномерном и равноускоренном движении точки.
- Основные законы динамики.
- Вывести рабочую формулу для определения теоретического ускорения грузов в данной работе.
- Как по графику определить среднее значение экспериментального ускорения и найти для него интервал надежности?

**Литература.** Курс общей физики под ред. Савельева И. В. т. 1.

### Лабораторная работа № 3. Изучение законов вращательного движение при помощи маятника Обербека.

**Цель работы:** Экспериментальная проверка основного закона динамики вращательного движения и определение момента инерции маятника Обербека.

#### 1. Теоретическое введение

Для описания кинематики вращательного движения тела, по аналогии с кинематикой поступательного движения (см. теоретическое введение к предыдущей работе), вводятся понятия углового перемещения (угла поворота радиус-вектора  $r$ )  $\alpha$ , угловой скорости вращения  $\omega = d\alpha/dt$  и углового ускорения  $\varepsilon = d\omega/dt$ .

Связь между линейными и угловыми величинами, описывающими движение данной точки вращающегося тела, даются выражениями:

$$V = \omega \cdot r \quad \text{и} \quad a = \varepsilon \cdot r \quad [1]$$

Для характеристики инерционности тела при вращении вводятся понятия момента инерции материальной точки массы  $m$ , находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения  $J = m \cdot r^2$  и момент инерции тела  $J_i = r_i^2 \Delta m_i$ , равный сумме моментов инерции  $J_i = r_i^2 \Delta m_i$  всех материальных точек составляющих тело - сумме произведений масс  $\Delta m_i$  этих точек на квадрат расстояния до оси  $r_i^2$ :

$$J = \sum_i J_i = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm \quad [2]$$

Нахождение момента инерции во многих случаях значительно облегчается при использовании **теоремы Штейнера**: момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $l$  между осями:

$$J = J_c + ml^2 \quad [3]$$

Для описания вращательного движения под действием той или иной силы важна не только величина силы, но, также то, к какой точке тела она приложена. Поэтому вместо силы  $f$ , при вращательном движении используют величину момента силы относительно данной оси вращения:

$$M = f \cdot r \quad [4]$$

где  $r$  - плечо силы, кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения.

В зависимости от направления вращения, создаваемой силой, величине момента приписывается знак плюс или минус (в соответствии с правилом правого винта). Если к телу одновременно приложены моменты нескольких сил, то они складываются, с учетом знака.

Основной закон динамики вращательного движения (аналог второго закона Ньютона) связывает результирующий момент сил  $M$ , действующих на тело и его угловое ускорение  $\varepsilon$  (аналог линейного ускорения):

$$\varepsilon = M/J \quad [5]$$

где  $J$  – момент инерции тела, относительно оси вращения, определяемый выражением [2],  $M$  - момент сил, приложенных к телу, относительно той же оси вращения (определяется выражением [4]).

## Описание установки и расчетные формулы.

Для изучения основного закона динамики вращательного движения в данной работе используется маятник Обербека, схема которого изображена на рис. 1.

Маятник состоит из четырех стержней 1, укрепленных во втулке. На стержнях, на расстоянии  $l$  от оси, закрепляются грузы 2, перемещая которые, можно менять момент инерции маятника. На одной оси с маятником насажены два шкива: большего 3 и меньшего 4 радиуса  $r$ . Гири 5, приводящая тело во вращение, прикреплена к концу нити, которая наматывается на шкив 3 или 4. На основную гирю 5 могут надеваться от одного до четырех дополнительных грузов 6. Для фиксации времени и остановки опускания груза 5, служит фотодатчик 7.

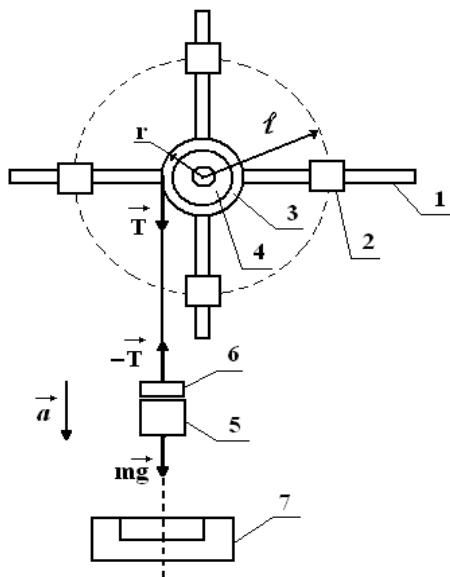


Рис. 1

Вращение маятника происходит под действием момента силы натяжения нити  $M$  противоположно направлению момента сил трения  $M_{mp}$ . Таким образом, согласно равенству [5] уравнение движения маятника имеет вид:

$$\varepsilon = (M - M_{mp})/J \quad \text{или} \quad M = M_{mp} + J \cdot \varepsilon \quad [6]$$

Из равенства [6] видно, что если сила трения постоянна (не зависит от скорости), то зависимость величины  $M$  от  $\varepsilon$  является линейной функцией вида:  $y = y_0 + k \cdot x$ . При этом  $J$  играет роль углового коэффициента  $k$ . Таким образом, экспериментальное исследование взаимосвязи между моментом силы натяжения  $M$  и угловым ускорением  $\varepsilon$

позволяет найти момент инерции маятника  $J$ .

Движение гири 5 происходит под действием силы тяжести  $mg$ , где  $m$  - масса гири;  $g$  - ускорение свободного падения, и силы натяжения нити  $T$ . Согласно второму закону Ньютона, уравнение движения гири имеет вид:

$$ma = mg - T \quad [7]$$

Ускорение движения гири  $a$ , можно найти, с одной стороны, зная время  $t$  её опускания и пройденный путь  $h$ , с другой стороны, по значению  $\varepsilon$  - углового ускорения вращения шкива и  $r$  - радиуса шкива.

$$a = \frac{2h}{t^2} = \varepsilon \cdot r \quad \text{откуда} \quad \varepsilon = \frac{2h}{r \cdot t^2} \quad [8]$$

Из уравнений [7] и [8] получаем выражение для определения момента силы натяжения нити, относительно оси вращения (массой блока и трением на оси блока пренебрегаем):

$$M \approx T \cdot r = m \cdot r(g - \varepsilon \cdot r) \quad [9]$$

Формулы [8] и [9] позволяют найти, по экспериментальным данным, угловое ускорение  $\varepsilon$  и момент силы натяжения  $M$ . Проведя опыты с гирями различной массы  $m$ , находим ряд точек  $(M_i; \varepsilon_i)$ . Строим точки на графике  $M = f(\varepsilon)$ , откладывая по вертикальной оси моменты сил натяжения  $M$ , а по горизонтальной оси, соответствующие им угловые ускорения  $\varepsilon$ . **Если формула [6] верна, то экспериментальные точки должны хорошо укладываться на прямую линию.** Определение момента инерции маятника сводится к определению углового коэффициента  $tg\alpha = J$  прямой линии, проведенной по найденным точкам.

Следуя рекомендациям по графическому определению параметров прямой линии, приведенным во введении §2, проводим наилучшую прямую и определяем среднюю величину экспериментального значения момента инерции маятника Обербека  $\langle J \rangle$ :

$$\langle J \rangle = tg \alpha \quad [10]$$

Интервала надежности полученного значения  $\langle J \rangle$  можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения, зная инструментальную погрешность определения  $h$  (миллиметровая линейка,  $\Delta_h = 0,5$  мм) и погрешность определения времени  $t$  (электронный таймер,  $\Delta_t = 0,001$  с):

$$\Delta J \approx t_{p,n} 2 \left( \frac{\Delta_h}{h} + 2 \frac{\Delta_t}{t} \right) \langle J \rangle \quad [11]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора интервала надежности (доверительной вероятности)  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $J = \langle J \rangle \pm \Delta J$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнение работы

### Приборы и принадлежности:

1. Маятник Обербека на стойке с фотодатчиком и секундомером
2. Гири и 4 добавочных груза
3. 4 груза (равной массы), насаженных на спицы маятника.
4. Штангенциркуль.

Выровнять стойку так, чтобы гиря при опускании не задевала фотоэлементы. Расположить фотодатчик 7 таким образом, чтобы гиря с дополнительными грузами при движении вниз проходила по центру рабочего окна фотодатчика.

1. Установить все грузы по осям крестовины на одном расстоянии  $l = 14$  см от оси вращения. Измерить штангенциркулем радиусы  $r$  шкивов 3 и 4, записать в таблицу.
2. Вращая маятник и наматывая нить на шкив 3 (или 4), установить гирю 5 в крайнем верхнем положении таким образом, чтобы нижняя плоскость гири совпала с одной из рисок шкалы вертикальной стойки. Зафиксировать гирю в этом положении, нажав на кнопку «СЕТЬ» блока.
3. Определить по шкале вертикальной стойки и записать в таблицу, путь гири  $h$  - расстояние от нижней плоскости гири в верхнем положении до оптической оси фотодатчика.
4. Нажать на кнопку «ПУСК» блока. При пересечении гирей оптической оси фотодатчика отсчет времени прекратится. Записать время движения гири  $t$  в таблицу и нажать клавишу «СБРОС».
5. Повторить пункты 2 - 4 увеличивая массу гири  $m$  с помощью дополнительных грузов 6, не изменяя значения  $h$ . Всего провести не менее 10-ти измерений (5 со шкивом 3 и 5 со шкивом 4) .
6. По формулам [8] и [9] рассчитать значения  $\varepsilon$  и  $M$ . Построить график функции  $M = f(\varepsilon)$ . Пользуясь графиком, по формуле [10], определить момент инерции  $\langle J \rangle$  и, по формуле [11], оценить интервал надежности  $\Delta J$  (полагая  $t = t_{\max} / 2$ , где  $t_{\max}$  - наибольшее значение в таблице). Записать результат в таблицу, в стандартном виде.
7. Повторить пункты 1 - 7 при двух других значениях расстояний грузов  $l$  от оси вращения на осях крестовины ( 11 см и 9 см).
8. Построить график зависимости  $J(l^2)$ , если верна теорема Штейнера (формула [3]), то точки должны хорошо ложиться на прямую линию. Провести прямую линию и найти значение момента инерции маятника без грузов  $J_c$  (по точке пересечения проведенной прямой с осью ординат), записать это значение в таблицу результатов.

**Таблица результатов**

№ опыта	r, мм	h, мм	m, г	l = 14 см			l = 11 см			l = 9 см		
				t, с	$\epsilon, c^{-2}$	M, Н·м	t, с	$\epsilon, c^{-2}$	M, Н·м	t, с	$\epsilon, c^{-2}$	M, Н·м
1												
2												
3												
4												
5												
6												
7												
8												
9												
10												
$J, \text{кг}\cdot\text{м}^2$												
$J_c, \text{кг}\cdot\text{м}^2$												

**Контрольные вопросы.**

1. Понятия момента инерции материальной точки, момента инерции тела и единица измерения момента инерции в системе СИ.
2. Как вычислить момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр инерции тела, относительно произвольной оси?
3. Как можно изменить момент инерции маятника Обербека?
4. Угловое ускорение тела вращающегося вокруг оси и единица ее измерения.
5. Связь углового и тангенциального ускорения при вращательном движении.
6. Как определяется момент силы, и в каких единицах его измеряют?
7. Как можно изменить момент силы, приводящий во вращение маятник Обербека?
8. Основное уравнение динамики вращательного движения. Записать в математическом виде.
9. Какие силы действуют на маятник Обербека и груз во время движения? Показать силы на рисунке и написать уравнения движения маятника.
10. Как графически определить момент инерции маятника Обербека в данной работе и оценить интервал надежности?

**Литература.** Курс общей физики под ред. Савельева И. В. т. 1.

**Лабораторная работа № 4. Изучение сложного движения твердого тела с помощью маятника Максвелла.**

**Цель работы:** Изучение сложного движения твердого тела и проверка закона сохранения полной энергии на примере движения маятника Максвелла.

**1. Теоретическое введение**

Существует два основных вида движения твердого тела – **поступательное и вращательное.**

**Поступательное движение**

При поступательном движении все точки тела получают за один и тот же промежуток времени равные по модулю и направлению перемещения, вследствие чего скорости и ускорения всех точек в каждый момент времени оказываются одинаковыми. Поэтому достаточно опреде-

лечь движение одной из точек тела (например, его центра масс) для того, чтобы охарактеризовать полностью движение всего тела.

Для описания кинематики поступательного движения тела вводятся понятия перемещения  $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$  (где  $\vec{r}_2$  и  $\vec{r}_1$  - радиус-векторы конечной и начальной точек, соответственно), скорости  $\vec{V} = d\vec{r}/dt$  и ускорения  $\vec{a} = d\vec{V}/dt$ .

Инерционность поступательного движения тела характеризуется его массой  $m$ .

Основной закон динамики поступательного движения тела связывает векторную сумму сил, действующих на тело, с величиной ускорения тела (второй закон Ньютона):

$$\vec{a} = \vec{F}_{\text{рез}}/m \quad [1]$$

Полная механическая энергия  $W_{\text{ноcm}}$  поступательно движущегося (в поле тяготения Земли) тела, равна сумме его кинетической  $W_K$  и потенциальной  $W_{\text{п}}$  составляющих:

$$W_{\text{ноcm}} = W_K + W_{\text{п}} = \frac{mV^2}{2} + mgh \quad [2]$$

где  $g$  - ускорение свободного падения,  $h$  - высота тела от поверхности Земли.

### Вращательное движение.

При вращательном движении все точки твердого тела движутся по окружностям, центры которых лежат на одной и той же прямой, называемой осью вращения.

Для описания кинематики вращательного движения тела, по аналогии с кинематикой поступательного движения, вводятся понятия углового перемещения (угла поворота радиус-вектора  $r$ , начинающегося на оси вращения)  $\Delta\alpha$ , угловой скорости вращения  $\omega = d\alpha/dt$  и углового ускорения  $\varepsilon = d\omega/dt$ .

Связь между линейными и угловыми величинами, описывающими движение данной точки вращающегося тела, даются выражениями:

$$V = \omega \cdot r \quad \text{и} \quad a = \varepsilon \cdot r \quad [3]$$

Инерционность тела при вращении характеризуется моментом инерции, равным сумме моментов инерции  $J_i = r_i^2 \Delta m_i$  всех материальных точек составляющих тело - сумме произведений масс  $\Delta m_i$  этих точек на квадрат расстояния до оси  $r_i^2$ :

$$J = \sum_i J_i = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm \quad [4]$$

При вращательном движении используют величину момента силы  $f$  относительно данной оси вращения:

$$M = f \cdot r_0 \quad [5]$$

где  $r_0$  - плечо силы (кратчайшее расстояние от линии действия силы до оси вращения). В зависимости от направления вращения, создаваемой силой, величине момента приписывается знак плюс или минус (в соответствии с правилом правого винта). Если к телу одновременно приложены моменты нескольких сил, то они складываются, с учетом знака.

Основной закон динамики вращательного движения (аналог второго закона Ньютона) связывает результирующий момент сил  $M$ , действующих на тело и его угловое ускорение  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = M/J \quad [6]$$

где  $J$  - момент инерции тела, относительно оси вращения [4]. Кинетическая энергии вращающегося тела:

$$W_{\text{вращ}} = \frac{J\omega^2}{2} \quad [7]$$

## Сложное движение.

Оказывается, что любое движение твердого тела может быть представлено как наложение двух указанных выше основных видов движения, при этом полная механическая  $W_{мех}$  энергия тела равна:

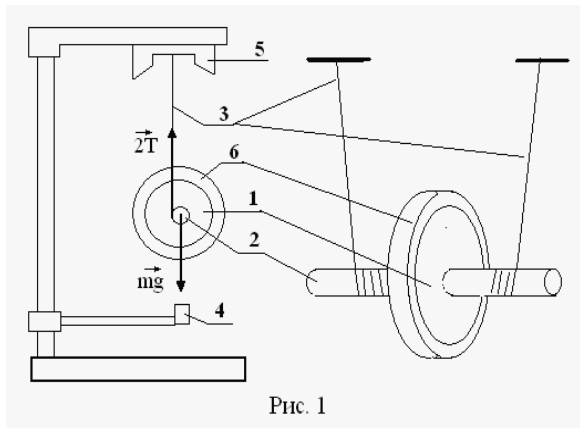
$$W_{мех} = W_{пост} + W_{вращ} = \frac{mV^2}{2} + mgh + \frac{J\omega^2}{2} \quad [8]$$

В замкнутой консервативной системе тел (при отсутствии потерь на преодоление сил сопротивления и трение) сумма их полных механических энергий [8] сохраняется (**закон сохранения полной механической энергии консервативной системы тел**).

Если замкнутая система тел не является консервативной, то часть этой энергии переходит в немеханическую форму (тепловую, энергию излучения), но остается в системе. В этом случае будет сохраняться сумма полной механической и всех других форм энергии тел вместе взятых (**закон сохранения энергии замкнутой системы тел**). Разность запаса потенциальной  $mgh$  и полной кинетической энергий  $(mV^2 + J\omega^2)/2$  позволяет определить величину работы, совершенной системой против сил сопротивления.

## Описание установки и расчетные формулы

Общий вид установки, используемой в настоящей работе, представлен на рис. 1. Маятник



Максвелла представляет собой металлический диск 1, в середине которого укреплен стержень 2. К концам этого стержня прикреплены две крепкие (капроновые) нити 3. Они наматываются на стержень (от концов его к диску). Фиксация диска маятника осуществляется при помощи электромагнита, входящего в устройство регулировки исходного положения 5. Фотодатчик 4 служит для остановки таймера. Диск маятника представляет собой непосредственно сам диск и сменные кольца 6, закрепляющиеся на диске.

При освобождении маятника он начинает движение: поступательное вниз и вращательное вокруг своей оси симметрии. Вращение, продолжаясь по инерции в низшей точке движения (когда нити уже размотаны), приводит вновь к наматыванию нитей на стержень, а, следовательно, и к подъему маятника. В верхней точке, маятник останавливается и снова начинает свое движение вниз и т.д. Ход маятника (расстояние, проходимое маятником) может быть измерено по вертикальной рейке с делениями, укрепленной на стойке.

Уравнения движения маятника без учета сил трения имеют вид:

$$\begin{cases} ma = mg - 2T, \\ J\varepsilon = 2T \cdot r, \\ a = \varepsilon \cdot r, \end{cases} \quad [9]$$

где  $m$  – масса маятника,  $J$  – момент инерции маятника,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $r$  – радиус стержня,  $T$  – сила натяжения каждой нити,  $a$  – ускорение поступательного движения центра масс маятника,  $\varepsilon$  – угловое ускорение маятника.

Решение системы уравнений [9] позволяет рассчитать теоретическое ускорение поступательного движения центра масс маятника:

$$a_T = g / (1 + J/mr^2). \quad [10]$$

С другой стороны, ускорение  $a$ , можно определить по измеренному времени движения  $t$  и расстоянию  $h$ , проходимому маятником:



$$a_3 = 2h/t^2. \quad [11]$$

Масса маятника является суммой масс его частей (оси  $m_0$ , диска  $m_d$  и кольца  $m_k$ ):

$$m = m_0 + m_d + m_k. \quad [12]$$

Момент инерции маятника  $J$ , также определяется суммой моментов инерции его частей ( $J_0, J_d, J_k$  – моменты инерции оси, диска и кольца маятника):

$$J = J_0 + J_d + J_k = \frac{m_0 r^2}{2} + \frac{m_d R_d^2}{2} + \frac{m_k (R_k^2 + R_d^2)}{2} \quad [13]$$

где  $r$  – радиус оси,  $m_0 = 0,019$  кг – масса оси,  $R_d$  – радиус диска,  $m_d = 0,1$  кг – масса диска,  $R_k$  – внешний радиус кольца,  $m_k$  – масса кольца.

Зная линейное ускорение  $a_3$ , легко найти скорость движения оси маятника и угловую скорость его вращения, для любого момента времени  $t$ :

$$V = a_3 \cdot t; \text{ и } \omega = V/r \quad [14]$$

Полная кинетическая энергия маятника складывается из энергии поступательного перемещения центра масс (совпадающего с центром оси) и из энергии вращения маятника вокруг оси:

$$W_k = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2}. \quad [15]$$

### Интервал надежности

Интервал надежности экспериментального значения ускорения маятника [11], можно рассчитать по правилу расчета погрешности косвенных измерений:

$$\Delta a_3 \approx t_{p,n} \left( \frac{\Delta h}{\langle h \rangle} + 2 \frac{\Delta t}{\langle t \rangle} \right) < a_3 >, \text{ где } \langle a_3 \rangle = \frac{\langle h \rangle}{\langle t \rangle^2} \quad [16]$$

где  $t_{p,n}$  – коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора доверительной вероятности  $p$  и числа измерений  $n$ .

## 2. Выполнение работы

### Приборы и принадлежности:

1. Маятник Максвелла на стойке с фотодатчиком и секундомером
2. Съёмное кольцо
3. Штангенциркуль

**Внимание!** Все измерения необходимо производить с большой осторожностью, так как маятник легко повредить, если даже незначительно погнуть его стержень.

1. Нажать кнопку «СЕТЬ». Аккуратно вращая маятник, зафиксировать его в верхнем положении при помощи электромагнита, при этом необходимо следить за тем, чтобы нить наматывалась на ось виток к витку. Нажать на кнопку «СБРОС».
2. Нажать на кнопку «ПУСК» блока. По шкале стойки определить ход маятника  $h$ , по показаниям таймера – время движения груза  $t$  и записать значения  $h$  и  $t$ , в соответствующую строку таблицы 1. Нажать клавишу "СБРОС".
3. Повторить пункты 1 – 2, не менее 5 раз, записывая результаты измерений в соответствующую строку таблицы 1.

4. Найти среднее значение измеренных значений  $\langle h \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n h_i$  и  $\langle t \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i$  и записать в таблицу 1. Определить экспериментальное значение ускорения и вычислить интервал надежности по формулам [16].

- С помощью штангенциркуля измерить радиусы оси маятника, диска и кольца  $r$ ,  $R_d$ ,  $R_k$ . Определить массу кольца  $m_k$ , взвесив его на весах. По формулам [12] и [13] рассчитать массу и момент инерции маятника, соответственно.
- По формулам [14], рассчитать линейную  $V$  и угловую  $\omega$  скорости движения маятника (в момент прохождения оси фотодатчика) и записать в таблицу 2 .
- По формуле [10] рассчитать теоретическое значение ускорения  $a_T$  и определить относительную погрешность теоретического и экспериментального значения ускорений по формуле:  $\eta = \frac{\langle a_s \rangle - a_T}{a_T} 100\%$  и записать в таблицу 2 .
- По формуле [15] найти кинетическую энергию маятника Максвелла в момент прохождения оси фотодатчика, сравнить ее с начальной потенциальной энергией  $W_n = mgh$  . По разности этих энергий найти работу сил сопротивления.

**Таблица 1. Расчет  $\langle a_s \rangle$  маятника.**

№ опыта	$h$ , мм	$t$ , с
1		
2		
3		
4		
5		
Средние значения	$\langle h \rangle =$	$\langle t \rangle =$
$\langle a_s \rangle$ , м/с <sup>2</sup>	$\langle a_s \rangle =$	

**Таблица 2. Расчет момента инерции  $J$  и  $a_T$  маятника.**

Параметры	Ось		Диск		Кольцо			Маятник
	$r$ , мм	$m_0$ , г	$R_d$ , мм	$m_d$ , г	$R_k$ , мм	$b$ , мм	$m_k$ , г	$m$ , г
		19		100				
$J$ , кг·м <sup>2</sup>								
$V$ , м/с								
$\omega$ , рад/с								
$a_T$ , м/с <sup>2</sup>	$a_T =$							
$\eta$ , %	$\eta =$							
$A_{соп}$ , Дж	$A_{соп} = W_k - mgh =$							

### Контрольные вопросы.

- Виды движения твердого тела.
- Перемещение, скорость и ускорение при поступательном движении тела.
- Основной закон динамики поступательного движения тела.
- Кинетическая, потенциальная и полная механическая энергия поступательно движущегося тела.
- Угловое перемещение, угловая скорость и угловое ускорение вращающегося тела.
- Момент инерции материальной точки и твердого тела. Момент силы.
- Основной закон динамики вращательного движения тела.
- Кинетическая энергия вращающегося тела.
- Кинетическая энергия маятника Максвелла

10. Закон сохранения энергии замкнутой консервативной и неконсервативной системы тел. Работа сил сопротивления.
11. Применение законов динамики к движению маятника Максвелла [9].

## Лабораторная работа № 5. Определение ускорения свободного падения при помощи математического маятника.

**Цель работы:** Исследование колебательного движения на примере математического маятника и определение ускорения свободного падения.

### 1. Теоретическое введение

Материальные точки с массами  $m_1$  и  $m_2$ , находящиеся на расстоянии  $r$  друг от друга взаимодействуют по закону всемирного тяготения, установленного Ньютоном:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2} \quad [1]$$

где  $G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ Н} \cdot \text{м}^2 / \text{кг}^2$  - гравитационная постоянная.

Закон тяготения в форме [1] справедлив и для сферически однородных протяженных тел, в частности, его можно использовать при вычислении силы тяготения тел к Земле:

$$F = G \frac{M_3 \cdot m}{(R_3 + h)^2} = mg, \quad [2]$$

где  $M_3$  и  $R_3$  – масса и радиус Земли, соответственно,  $h$  – расстояние тела массой  $m$  от поверхности Земли (высота),  $g$  – ускорение свободного падения.

Ускорение  $g$ , приобретаемое свободно падающим на Землю телом, с учетом [2], равно:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2} \quad [3]$$

и, направлено вертикально вниз, к центру Земли.

Вблизи поверхности Земли ( $h = 0$ ) среднее (стандартное) значение ускорения свободного падения равно  $g = 9,80 \text{ м/с}^2$ . Сплюснутость Земли ( $R_3 \neq const$ ) и ее вращение (неинерциальность системы отсчета, связанной с Землей) приводят к отличию ускорения свободного падения (и, следовательно, силы тяжести) на экваторе ( $g \approx 9,78 \text{ м/с}^2$ ) и на полюсе ( $g \approx 9,83 \text{ м/с}^2$ ). Вращение Земли приводит также к зависимости ускорения свободного падения от широты местности.

**Математическим маятником** называется тело малых размеров (материальная точка), подвешенное к неподвижной опоре на невесомой нерастяжимой нити, и способное совершать колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 1).

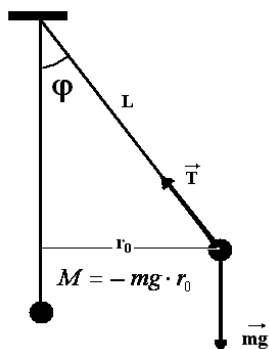


Рис. 1

Основной закон динамики вращательного движения (аналог второго закона Ньютона) связывает результирующий момент сил  $M$ , действующих на тело и его угловое ускорение  $\varepsilon$  (аналог линейного ускорения):

$$\varepsilon = \frac{M}{J} \quad \text{или} \quad J \cdot \varepsilon = M \quad [4]$$

где  $J$  – момент инерции тела, относительно оси вращения.

Так как момент силы натяжения нити  $T$ , относительно оси вращения маятника равен нулю, результирующий момент равен моменту силы тяжести:

$$M = -mg \cdot r_0, \quad [5]$$

где  $r_0 = L \cdot \sin \varphi$  - плечо силы тяжести. Знак минус в [5], учитывает

противоположность направлений вращательного момента и угла отклонения маятника от вертикали.

Подставляя [5] в [4], и учитывая, что момент инерции материальной точки, относительно оси вращения равен:  $J = mL^2$ , а его угловое ускорение  $\varepsilon = \varphi''$ , где  $\varphi''$  - вторая производная по времени угла отклонения нити от вертикали, получим:

$$mL^2 \varphi'' = -mgL \cdot \sin \varphi \quad [6]$$

Для малых углов отклонения маятника, при которых  $\sin \varphi \approx \varphi$  дифференциальное уравнение движения маятника запишется в виде (предварительно, уравнение [6] поделим на  $mL^2$  и перенесем все слагаемые влево):

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad [7]$$

где  $\omega_0^2 = g/L$  - собственная частота колебания маятника. Решение данного уравнения:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cdot \cos(\omega_0 t + \delta), \quad [8]$$

где  $\varphi_m$  - амплитуда колебаний (максимальный угол отклонения от вертикали),  $\delta$  - начальная фаза колебания. Таким образом, при малых амплитудах математический маятник совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{g/L}$  и периодом  $T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ . Откуда:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2} \quad [9]$$

**Физическим маятником** называется твердое тело, имеющее возможность совершать колебания под действием силы тяжести вокруг неподвижной горизонтальной оси (точка  $O$  на рис. 2), не проходящей через центр массы тела (точка  $C$ ).

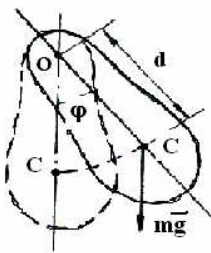


Рис. 2

Повторяя предыдущий вывод, и учитывая, что момент силы тяжести, относительно оси вращения  $O$  равен:  $M = -mgd \cdot \sin \varphi$ , где  $d \cdot \sin \varphi$  - плечо силы, момент инерции маятника, относительно той же оси -  $J$ , находим уравнение колебаний:

$$J\varphi'' = -mgd \cdot \sin \varphi$$

Для малых углов отклонения маятника, при которых  $\sin \varphi \approx \varphi$  дифференциальное уравнение движения маятника запишется в виде

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0$$

Частота и период малых колебаний физического маятника:

$$\omega_0 = \sqrt{mgd/J} \quad \text{и} \quad T = 2\pi\sqrt{J/mgd}$$

Приравняв выражения для периодов колебаний математического и физического маятников, находим приведенную длину физического маятника:

$$l_{\text{прив}} = J/md$$

### **Описание установки и расчетные формулы**

Схема установки показана на рис.3. В качестве математического маятника используется металлический шар 1, подвешенный на двух капроновых нитях к кронштейну 2. На этом же кронштейне находится ролик 3, позволяющий изменять длину маятника. На нижнем кронштейне укреплен фотодатчик 4. Расстояние между кронштейнами определяется по нанесенной на штатив шкале 5.

Для экспериментального определения ускорения свободного падения перепишем соотношение [9] в следующем виде:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{g}L = \operatorname{tg}\alpha \cdot L \quad [10]$$

где  $\operatorname{tg}\alpha = 4\pi^2 / g$  - коэффициент пропорциональности между квадратом периода и длиной маятника (тангенс угла наклона графика зависимости  $T^2 = f(L)$ ).

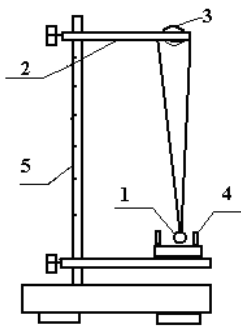


Рис. 3

Изменяя длину маятника  $L$ , и определяя периоды его колебаний, находим ряд точек  $(L_i; T_i)$ . Строим точки на графике  $T^2 = f(L)$ , откладывая по вертикальной оси квадраты периодов колебаний  $T^2$ , а по горизонтальной оси, соответствующие им длины маятника  $L$ . Следуя рекомендациям по графическому определению параметров прямой, приведенным во введении в разделе «Графическая обработка результатов измерений», проводим наилучшую прямую. По графику функции  $T^2 = f(L)$  определяем тангенс угла наклона  $\operatorname{tg}\alpha$  и экспериментальное значение ускорения свободного падения  $\langle g_s \rangle$ :

$$\langle g_s \rangle = 4\pi^2 / \operatorname{tg}\alpha \quad [11]$$

**Интервала надежности** полученного значения  $\langle g_s \rangle$  можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения:

$$\Delta g_s \approx t_{p,n} \left( \frac{\Delta L}{L} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right) \langle g_s \rangle \quad [12]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора интервала надежности (доверительной вероятности)  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $g_s = \langle g_s \rangle \pm \Delta g_s$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнения работы

**Приборы и принадлежности:** Математический маятник на стойке с фотодатчиком и секундомером

Вывернуть стойку так, чтобы маятник при колебаниях не задевал фотоэлементы и проходил по центру рабочего окна фотодатчика.

1. По шкале на вертикальной стойке определить длину маятника  $L_1$ .
2. Отклонить маятник от положения равновесия на угол  $(5 - 6)^\circ$ , после чего нажать кнопку «Сброс» на блоке. По показанию таймера определить продолжительность  $N = 40 - 50$  полных колебаний маятника  $t$ , и записать в таблицу.
3. Определить значение периода колебаний маятника по формуле:  $T = t / N$
4. Повторить пункты 1 - 3, изменяя длину математического маятника, не менее 5 раз.
5. По данным таблицы построить график  $T^2 = f(L)$ . Пользуясь графиком определить по формуле [11] значения ускорения свободного падения  $\langle g_s \rangle$ , по формуле [12] оценить интервал надежности найденного значения (полагая  $L = L_{\max} / 2$  и  $T = T_{\max} / 2$ , где  $L_{\max}$  и  $T_{\max}$  - наибольшие их значения в таблице) и записать в стандартном виде.
6. Рассчитать относительную погрешность экспериментального и стандартного значений  $(g = 9,80 \frac{M}{c^2})$  по формуле:  $\varepsilon = \frac{g - \langle g_s \rangle}{g} \cdot 100\%$  и записать в последнюю строку таблицы.

## Таблица результатов

№ опыта	L, мм	t, с	N	T, с
1				
2				
3				
4				
5				
$g_0 = \langle g_0 \rangle \pm \Delta g_0, \text{ м/с}^2$	$g_0 =$ ; $p =$			
$\varepsilon$	$\varepsilon =$			

### Контрольные вопросы

1. Закон всемирного тяготения.
2. Сила тяготения тел к Земле и ускорение свободного падения.
3. Зависимость ускорения свободного падения от высоты над поверхностью Земли и широты местности.
4. Что называется математическим маятником?
5. Дифференциальное уравнение движения математического маятника и его решение.
6. Период и собственная частота колебаний математического маятника.
7. Что называется физическим маятником? Период, частота и приведенная длина физического маятника.
8. Как определить ускорение свободного падения с помощью математического маятника в данной работе?

## Лабораторная работа № 6. Проверка законов сохранения импульса и энергии при соударении тел.

**Цель работы:** Проверка законов сохранения импульса и энергии при центральном упругом и неупругом ударе двух шаров.

### 1. Теоретическое введение

#### Законы сохранения импульса и энергии в механике

**Импульсом тела** называется вектор, равный произведению массы тела на его скорость движения, в данной системе отсчета:

$$\vec{p} = m\vec{V}. \quad [1]$$

**Работой совершаемая силой  $\vec{F}$**  при перемещении тела из точки 1 в точку 2, называется скалярная величина, равная:

$$A = \int_1^2 dA = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2} F \cdot \cos \alpha \cdot dr \quad [2]$$

где  $\alpha$  - угол между векторами силы  $\vec{F}$  и перемещения  $d\vec{r}$ .

Энергия (возможность совершить работу), запасенная движущимся телом, называется его **кинетической энергией**:

$$E_k = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int m\vec{a} \cdot d\vec{r} = \int m \frac{d\vec{V}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^V m\vec{V} \cdot d\vec{V} = \frac{mV^2}{2} \quad [4]$$

Энергия, определяемая взаимным расположением взаимодействующих тел или частей одного тела, называется его **потенциальной энергией**.

В поле тяготения Земли потенциальная энергия тела массой  $m$ , на высоте  $h$ , относительно поверхности Земли:  $E_p = \int mg \cdot dh = mg \cdot h$ .

Потенциальная энергия сжатой (растянутой) на величину  $x$  пружины, с коэффициентом упругости  $k$ :  $E_p = \int kx \cdot dx = kx^2/2$ .

**Механической системой** называется совокупность материальных точек (тел), рассматриваемых как единое целое. Система  $n$  тел называется **изолированной** (замкнутой), если тела, входящие в нее, взаимодействуют только между собой и не взаимодействуют с другими телами не входящими в нее.

Для описания системы  $n$  материальных точек (тел) в некоторой системе отсчета, вводится понятие радиус-вектора  $r_c$  центра масс (центра инерции) системы:

$$\vec{r}_c = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k / \sum_{k=1}^n m_k = \sum_{k=1}^n m_k \vec{r}_k / M \quad [2]$$

где  $m_k$  и  $\vec{r}_k$  масса и радиус-вектор  $k$ -того тела системы,  $M = \sum_{k=1}^n m_k$  - сумма масс всех тел, входящих в систему. Найдем скорость центра масс системы:

$$\vec{V}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \frac{d\vec{r}_k}{dt} = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n m_k \vec{V}_k = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = \frac{\vec{p}_c}{M} \quad [3]$$

где  $\vec{p}_k = m_k \vec{V}_k$  импульс  $k$ -того тела системы,  $\vec{p}_c = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k$  - векторная сумма импульсов всех тел, входящих в систему. Согласно второму закону Ньютона ускорение центра масс (при скоростях движения тел много меньше скорости света  $c \approx 3 \cdot 10^8$  м/с) равно:

$$\vec{a}_c = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \frac{d\vec{V}_c}{dt} = \frac{1}{M} \frac{d\vec{p}_c}{dt} \quad [4]$$

где  $\sum_{k=1}^n \vec{F}_k = \sum \vec{F}_e + \sum \vec{F}_i$  - векторная сумма всех внешних  $\vec{F}_e$  и внутренних  $\vec{F}_i$  сил,

действующих на тела системы. По третьему закону Ньютона векторная сумма всех внутренних сил взаимодействия тел системы между собой будет равна нулю, поэтому:

$$\sum \vec{F}_e = \frac{d\vec{p}_c}{dt} \quad [5]$$

Таким образом, поступательное движение системы  $n$  тел, можно описать как движение центра масс системы, под действием векторной суммы внешних сил.

В замкнутой системе векторная сумма всех внешних сил равна нулю  $\sum \vec{F}_e = 0$ , тогда векторная сумма импульсов тел сохраняется – **закон сохранения импульса**:

$$\vec{p}_c = \sum_{k=1}^n \vec{p}_k = const \quad [6]$$

Отметим, что импульс остается постоянным и для незамкнутой системы при условии, что внешние силы в сумме дают нуль. В случае, когда сумма внешних сил не равна нулю, но проекция этой суммы на некоторое направление есть нуль, сохраняется составляющая импульса в этом направлении.

Полная механическая энергия системы  $n$  тел, в поле тяготения Земли, может быть представлено как сумма кинетических энергий поступательного движения всех тел системы  $m_k V_k^2 / 2$  и их потенциальных энергий взаимодействия с Землей  $m_k g h_k$ :

$$W_{мех} = E_{кинети} + E_{потенци} = \sum \frac{m_k V_k^2}{2} + \sum m_k g \cdot h_k \quad [7]$$

где  $h_k$  -расстояние по вертикали  $k$ -того тела от точки, потенциальная энергия, которой принята равной нулю (например – точка на поверхности Земли).

В замкнутой консервативной системе (при отсутствии потерь на преодоление сил сопротивления) сумма их полных механических энергий [7] сохраняется - **закон сохранения полной механической энергии**.

### Соударение тел

При соударении тел друг с другом они претерпевают деформации. При этом кинетическая энергия, которой обладали тела перед ударом, частично или полностью переходит в потенциальную энергию упругой деформации и в так называемую внутреннюю энергию тел. Увеличение внутренней энергии тел сопровождается повышением их температуры. Существует два предельных вида удара: абсолютно упругий и абсолютно неупругий.

**Абсолютно упругим** называется такой удар, при котором механическая энергия тел не переходит в другие, немеханические, виды энергии. При таком ударе кинетическая энергия переходит полностью или частично в потенциальную энергию упругой деформации. Затем тела возвращаются к первоначальной форме, отталкивая друг друга. В итоге потенциальная энергия упругой деформации снова переходит в кинетическую энергию, и тела разлетаются со скоростями, модуль и направление которых определяются двумя условиями — **сохранением полной энергии и сохранением полного импульса** системы тел.

**Абсолютно неупругий удар** характеризуется тем, что кинетическая энергия тел полностью или частично превращается во внутреннюю энергию; после удара столкнувшиеся тела либо движутся с одинаковой скоростью, либо покоятся. При абсолютно неупругом ударе выполняется лишь **закон сохранения импульса**, закон же сохранения механической энергии не соблюдается: имеет место **закон сохранения суммарной энергии** различных видов — механической и внутренней.

Удар называется **центральным**, если шары до удара движутся вдоль прямой, проходящей через их центры инерции.

### Описание установки и расчетные формулы

Схема лабораторной установки показана на рис. 1. К штативу 1 прикреплены два шара. Углы отклонения подвесов от вертикали определяются по шкалам 3. Электромагнит 4 служит для удержания одного из шаров в отклоненном положении.

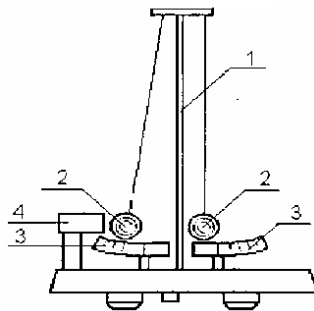


Рис. 1

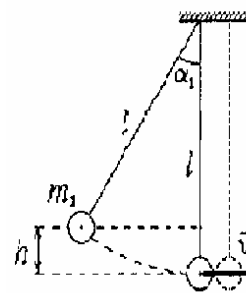


Рис. 2

Рассмотрим пример соударения шаров, приведенный на рис. 2. Отведем один из шаров (например, левый) на некоторый угол  $\alpha_1$  и отпустим без начальной скорости. Отклоненный шар будет двигаться, вниз разгоняясь, при этом его потенциальная энергия будет переходить в кинетическую.

Пусть столкновение со вторым шаром происходит в тот момент, когда нить первого шара становится вертикально. По закону сохранения механической энергии:

$$m_1 gh = m_1 V_1^2 / 2 \quad [8]$$

где  $m_1$  – масса шара,  $g$  – ускорение свободного падения,  $h$  – высота шара в отведенном положении относительно нижней точки траектории,  $V_1$  – скорость первого шара в нижней точке перед соударением со вторым.



Из рисунка 2 видно, что

$$h = l - l \cos \alpha_1 \quad [9]$$

где  $l$  – расстояние от точки подвеса до центра тяжести шара,  $\alpha_1$  – угол начального отклонения нити. Подставляя [9] в [8] и преобразуя уравнение, найдем выражение для скорости через угол начального отклонения:

$$V_1 = \sqrt{2gh} = \sqrt{2gl(1 - \cos \alpha_1)} = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha_1}{2} \quad [10]$$

Массы шаров подобраны так, чтобы после удара они разлетелись в разные стороны. После удара шары получают скорости  $V_1'$  и  $V_2'$ , и, разлетаясь, отклоняют нити на максимальные углы  $\alpha_1'$  и  $\alpha_2'$  соответственно. Аналогично соотношению [10] получаем:

$$V_1' = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha_1'}{2} \quad \text{и} \quad V_2' = 2\sqrt{gl} \cdot \sin \frac{\alpha_2'}{2} \quad [11]$$

Если удар происходит достаточно быстро, так, что нити во время удара не успевают отклониться на заметный угол, то в направлении горизонтальной оси  $x$  выполняется закон сохранения импульса в проекции на эту ось:

$$m_1 V_1 \approx m_2 V_2' - m_1 V_1' \quad [12]$$

При ударе шаров, близком к абсолютно упругому удару, должен также выполняться закон сохранения полной механической энергии:

$$\frac{m_1 V_1^2}{2} \approx \frac{m_1 V_1'^2}{2} + \frac{m_2 V_2'^2}{2} \quad [13]$$

При абсолютно неупругом ударе шаров полная механическая энергия не сохраняется и выполняется только закон сохранения импульса. Зная скорость движения шара 1 до удара  $V_1$  и, скорость соединившихся шаров 1 и 2 после неупругого удара  $V_{12}'$ , можно найти энергию, перешедшую из кинетической в другие формы (тепловую и потенциальную энергию деформации шаров):

$$\Delta E = \frac{m_1 V_1^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) V_{12}'^2}{2} \quad [14]$$

Если известна длительность удара  $\tau$ , то из второго закона Ньютона по изменению импульса одного из шаров (например, левого) можно определить среднюю силу взаимодействия между шарами:

$$F_{cp} = \frac{m_2 V_2' - m_2 V_2}{\tau} = \frac{m_2 V_2'}{\tau} \quad [15]$$

**Примечание:** В формулах [12] - [15], учтено, что скорость  $V_2 = 0$ .

## 2. Выполнение работы

Отрегулируйте положение шаров в вертикальной и горизонтальной плоскостях до совмещения верхних визиров скоб подвеса с помощью изменения длины подвеса шаров, а также изменения положения узлов крепления нитей на верхнем кронштейне.

1. На пульте блока нажмите кнопку "СБРОС". При этом на табло индикации высветятся нули, на электромагнит будет подано напряжение.
2. Отведите левый шар на угол  $\alpha_1$  и зафиксируйте его с помощью электромагнита. Определите начальный угол отклонения этого шара  $\alpha_1$ .
3. Нажмите кнопку "ПУСК", при этом произойдет удар шаров. По таймеру блока определите время соударения шаров  $\tau$ . При помощи шкал визуально определите углы отскока шаров  $\alpha_1'$  и  $\alpha_2'$ . Результаты занесите в таблицу.
4. Повторите измерения (пункты 1-3) не менее трех раз. Найдите среднее арифметическое значение каждого из углов  $\langle \alpha_1' \rangle$  и  $\langle \alpha_2' \rangle$ , и  $\langle \tau \rangle$ .

- По формуле [10] определите скорость  $V_1$  левого шара перед ударом. Используя средние значения углов отскока по формулам [11] определите скорости обоих шаров сразу после удара  $V_1'$  и  $V_2'$ . Проверьте выполнение закона сохранения импульса [12] и энергии [13] при упругом ударе.
- Используя найденное выше значение  $V_2'$  по формуле [15] определите среднюю силу, с которой шары действуют друг на друга во время удара.
- Прикрепите пластилин к левому (первоначально покоящемуся) шару и выполните измерения углов  $\alpha_1$  (угол отклонения первого шара до удара) и  $\alpha_{12}'$  (угол отклонения линии касания соединившихся шаров после удара).
- Повторите измерения не менее трех раз. Найдите среднее арифметическое значение каждого из углов  $\langle \alpha_1 \rangle$  и  $\langle \alpha_{12}' \rangle$ , результаты занесите в таблицу.
- По формуле [10] определите скорость  $V_1$  левого шара перед ударом. Используя средние значения угла отскока  $\langle \alpha_{12}' \rangle$ , по аналогичной формуле, определите скорости соединившихся шаров после удара  $V_{12}'$ . Проверьте выполнение закона сохранения импульса [12] и по формуле [14] найдите  $\Delta E$  при неупругом ударе.

**Таблица результатов**

Массы шаров	$m_1 =$			$m_2 =$		
№ опыта	Упругий удар			Неупругий удар		
	$\tau$ , с	$\alpha_1$ , град	$\alpha_1'$ , град	$\alpha_2'$ , град	$\alpha_1$ , град	$\alpha_{12}'$ , град
1						
2						
3						
Средние значения						
Скорости						
Импульсы						
Энергии						

### Контрольные вопросы

- Импульс тела в данной системе отсчета.
- Как вычислить работу силы по перемещению тела?
- Чем определяется кинетическая энергия движущегося тела?
- Чем определяется потенциальная энергия тела?
- Какая система тел называется изолированной, консервативной?
- Как определяется центр масс системы тел?
- Для чего вводится понятие центра масс (центра инерции).
- Сформулируйте закон сохранения импульса системы тел.
- Сформулируйте закон сохранения полной механической энергии системы тел.
- Какой удар называется абсолютно упругим? Абсолютно неупругим?
- Вывести выражение для скорости шара через угол начального отклонения.

### Лабораторная работа № 7. Определение скорости полета «пули» при помощи крутильного маятника баллистическим методом

**Цель работы:** Применение законов сохранения (момента импульса и энергии) для определения скорости полета «пули» с помощью крутильного маятника.

## 1. Теоретическое введение

Для характеристики **инерционности** тела при вращении вводятся понятия **момента инерции** материальной точки массы  $m$ , находящейся на расстоянии  $r$  от оси вращения  $J = m \cdot r^2$  и момент инерции тела  $J_i = r_i^2 \Delta m_i$ , равный сумме моментов инерции  $J_i = r_i^2 \Delta m_i$  всех материальных точек составляющих тело - сумме произведений масс  $\Delta m_i$  этих точек на квадрат расстояния до оси  $r_i^2$ :

$$J = \sum_i J_i = \sum_i r_i^2 \Delta m_i = \int_V r^2 dm \quad [1]$$

Нахождение момента инерции во многих случаях значительно облегчается при использовании **теоремы Штейнера**: момент инерции  $J$  относительно произвольной оси равен сумме момента инерции  $J_c$  относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела  $m$  на квадрат расстояния  $l$  между осями:

$$J = J_c + ml^2 \quad [2]$$

**Моментом силы**  $\vec{F}$  относительно некоторой точки "О" называется векторная величина  $\vec{M}$ , определяемая выражением

$$\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}] \quad [3]$$

где  $\vec{r}$  – радиус-вектор, проведенный из точки "О" в точку приложения силы.

Направление вектора  $M$  определяется по правилу правого винта. Момент силы направлен вдоль оси вынуждаемого вращения (он не имеет конкретной точки приложения, как обычные вектора), т.е. является *аксиальным псевдовектором*.

**Основной закон динамики вращательного движения** (аналог второго закона Ньютона) связывает результирующий момент сил  $M$ , действующих на тело и его угловое ускорение  $\varepsilon$  (аналог линейного ускорения):

$$\varepsilon = M/J \quad \text{или} \quad M = J \cdot \varepsilon \quad [4]$$

где  $J$  – момент инерции тела, относительно оси вращения, определяемый выражением [1],

**Импульсом тела** называется вектор, равный произведению массы тела на его скорость движения:

$$\vec{p} = m\vec{V}. \quad [5]$$

**Моментом импульса материальной точки**, относительно данной оси, называется вектор, определяемый векторным произведением радиус-вектора точки  $\vec{r}$  на его импульс  $\vec{p}$ :

$$\vec{L} = [\vec{r} \cdot \vec{p}]. \quad [6]$$

Модуль момента импульса точки, относительно оси равен:

$$L = p \cdot l = mV \cdot l = m\omega \cdot l \cdot l = m\omega \cdot l^2 = J\omega$$

где  $l$  - кратчайшее расстояние от точки до оси,  $J = m \cdot l^2$  - момент инерции точки, относительно оси,  $\omega$  - угловая скорость вращения.

Полная механическая энергия тела, массой  $m$ , может быть представлено как сумма кинетических энергий его поступательного и вращательного движений и потенциальной энергии взаимодействия с другими телами:

$$W_{\text{мех}} = E_{\text{пост}} + E_{\text{вращ}} = \frac{mV^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} + W_p \quad [7]$$

где  $mV^2/2$  - кинетическая энергия поступательного,  $J\omega^2/2$  - кинетическая энергия его вращательного движения, а  $W_p$  - потенциальная энергия.

## Законы сохранения в механике

В замкнутой системе  $n$  материальных тел, векторная сумма импульсов тел сохраняется – **закон сохранения импульса** (при этом векторная сумма всех внешних сил равна нулю):

$$\text{Если } \sum \vec{F}_e = 0, \text{ то } \vec{p}_c = \sum_{i=1}^n \vec{p}_i = \text{const} \quad [8]$$

В замкнутой консервативной системе (при отсутствии потерь на преодоление сил сопротивления) сумма их полных механических энергий [7] сохраняется - **закон сохранения полной механической энергии**.

Если суммарный момент внешних сил, действующих на систему, относительно какой-либо оси равен нулю, то **суммарный момент импульса такой системы материальных точек, относительно данной оси сохраняется – закон сохранения момента импульса**:

$$\text{Если } \vec{M}_e = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i = 0, \text{ то } \vec{L}_c = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i = \text{const} \quad [9]$$

В данной работе рассматривается система двух тел: «пуля» и рама крутильного маятника. Суммарный момент внешних сил в этом случае равен нулю и выполняется закон сохранения суммарного момента импульса.

## Крутильный маятник

**Крутильным маятником** называется тело (рама на рис. 1), подвешенное на упругой нити, которая натянута между двумя неподвижными опорами (унифилярный подвес), и способное совершать крутильные колебания в плоскости перпендикулярной нити.

Так как момент сил тяжести и силы натяжения нити, относительно оси вращения маятника равны нулю, результирующий момент равен моменту силы упругости нити (закон Гука):

$$M = -D \cdot \varphi, \quad [10]$$

где  $D$  - модуль кручения нити. Величина  $D$  зависит от длины проволоки, её диаметра и модуля сдвига, характеризующего упругие свойства материала проволоки. Знак минус в [10], учитывает противоположность направлений вращательного момента и угла закручивания нити маятника.

Подставляя [10] в [4], и учитывая, что угловое ускорение  $\varepsilon = \varphi''$ , где  $\varphi''$  - вторая производная по времени угла закручивания нити, получим:

$$J\varphi'' = -D\varphi \quad [11]$$

Поделим уравнение [11] на  $J$  и перенесем все слагаемые влево:

$$\varphi'' + \omega_0^2 \varphi = 0,$$

где  $\omega_0^2 = D/J$  - собственная частота колебания маятника. Решение данного уравнения:

$$\varphi(t) = \varphi_m \cdot \cos(\omega_0 t + \delta),$$

где  $\varphi_m$  – амплитуда (максимальный угол закручивания нити),  $\delta$  - начальная фаза колебания.

Таким образом, крутильный маятник совершает гармонические колебания с частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{D}{J}} \text{ и периодом } T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad [12]$$

При крутильных колебаниях, происходит преобразование кинетической энергии вращательного движения тела в потенциальную энергию упругости нити, и обратно. Полная энергия маятника (без учета потерь энергии на сопротивление среды) в любой момент времени равна их сумме:

$$W = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{D\varphi^2}{2} = \frac{D\varphi_m^2}{2} \quad [13]$$

## Описание установки и расчетные формулы.

Основным элементом установки (рис. 1) является крутильный маятник. «Пулей» служит тонкое металлическое кольцо 1. К стойке на кронштейне крепится «пистолет» 2, состоящий из направляющего стержня с пружиной и спускового устройства. К стойке также на кронштейне крепится фотодатчик 3, соединенный с электронным блоком регистрации времени и числа колебаний (на рисунке не показан).

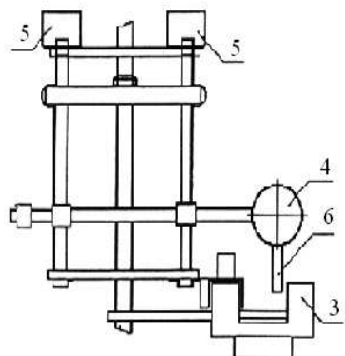


Рис. 1

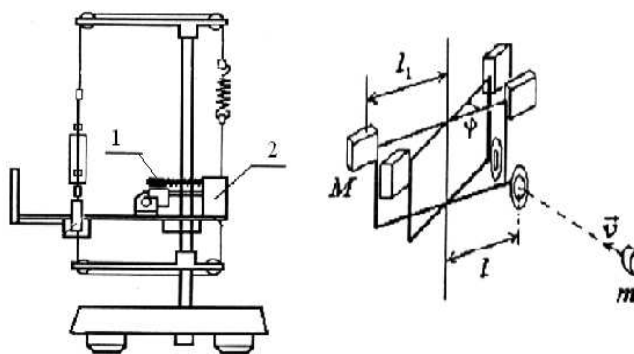


Рис. 2

После выстрела «пуля» 1 попадает в «мишень» 4 и прилипает к ее поверхности. Соударение пули с мишенью происходит за столь короткое время, что действием момента сил упругости нити за это время можно пренебречь. Сумма моментов внешних сил, действующих на рамку (сил тяжести и натяжения нити) относительно вертикальной оси равны нулю.

Момент импульса «пули», относительно оси вращения рамки до соударения:  $L_1 = mV \cdot l$ , где  $m$  - масса «пули»,  $V$  - его скорость,  $l$  – прицельное расстояние (рис. 2).

Момент импульса рамки маятника, относительно оси вращения после соударения:  $L_2 = J\omega$ , где  $J$  - момент инерции рамки, относительно оси вращения,  $\omega$  - угловая скорость вращения рамки.

По **закону сохранения момента импульса** системы: «пуля» - маятник, имеем:  $L_1 = L_2$ , следовательно:

$$mV \cdot l = J\omega . \quad [14]$$

Чтобы воспользоваться этой формулой, нужно найти угловую скорость рамки  $\omega$ , после удара и момент инерции рамки  $J$ , относительно оси вращения:

$$J = (J_0 + 2M \cdot l_1^2) \quad [15]$$

где  $J, J_0$  - моменты инерции рамки с грузами и без грузов,  $M$  - масса каждого из грузов,  $l_1$  – расстояние грузов от оси вращения. Выражение [15], является следствием **теоремы Штейнера** [2]. Вкладом в момент инерции прилипшей «пули» пренебрегаем, из-за малости его массы.

Момент инерции рамки с грузами можно найти из измерений периода колебаний рамки с грузами  $T$  и без них  $T_0$ .

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J_0}{D}}; T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{D}} \quad [16]$$

где  $D$  - модуль кручения проволоки.

Исключая модуль кручения  $D$  из формул [16], находим момент инерции рамки с грузами:

$$J = \frac{2M \cdot l_1^2 \cdot T^2}{T^2 - T_0^2} . \quad [17]$$

Для нахождения угловой скорости вращения маятника  $\omega$  воспользуемся **законом сохранения энергии**, полученной маятником после удара. Приравняв, кинетическую энергию вращательного движения рамки  $J\omega^2/2$  после удара потенциальной энергии закрученной нити  $D\varphi_m^2/2$ , находим угловую скорость рамки сразу после удара  $\omega$ :

$$\omega = \varphi_m \sqrt{\frac{D}{J}} = \varphi_m \frac{2\pi}{T} \quad [18]$$

Подстановка соотношений [17] и [18] в уравнение [14] дает окончательную формулу:

$$V = \frac{4\pi \cdot M \cdot l_1^2 \cdot T \cdot \varphi_m}{m \cdot l \cdot (T^2 - T_0^2)} \quad [19]$$

**Интервала надежности** полученного значения  $\langle V \rangle$  можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения:

$$\Delta V \approx t_{p,n} \left( \frac{\Delta m}{m} + \frac{\Delta M}{M} + \frac{\Delta l}{l} + 2 \frac{\Delta l_1}{l_1} + \frac{\Delta \varphi_m}{\varphi_m} + 2 \frac{\Delta T_0}{T_0} + 2 \frac{\Delta T}{T} \right) \langle V \rangle \quad [20]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора интервала надежности (доверительной вероятности)  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $V = \langle V \rangle \pm \Delta V$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнение работы

Убедитесь, что «мишень» 4 находится на линии «выстрела» и перпендикулярна ей, а флажок 6 пересекает при колебаниях рамки оптическую ось фотодатчика 3.

1. Установите грузы 5 на рамке. Измерьте штангенциркулем расстояние  $l_1$  от оси вращения рамки до центров грузов. С помощью лабораторных весов определите массу груза  $M$  и массу «пули»  $m$ . Записать все данные и погрешности их измерений в таблицу.
2. Установить «пулю» на стержень спускового устройства 2, взвести пружину и произвести «выстрел». Визуально определить максимальный угол  $\varphi_m$  отклонения рамки по шкале угловых перемещений с помощью флажка 7, закрепленного на рамке.
3. Измерить штангенциркулем прицельное расстояние  $l$  от оси вращения рамки до центра отпечатка «пули» в мишени.
4. Повторить пункты 2 – 3 не менее 3 раз и все данные занести в таблицу.
5. Отклоните рамку с грузами на угол  $40^\circ$  градусов и зафиксируйте с помощью электромагнита, нажав кнопку «СЕТЬ» блока.
6. Нажмите кнопку «СБРОС», для сброса показания таймера. Нажмите кнопку «ПУСК», и определите время  $t$ , за которое происходит  $N = 10 \div 15$  колебаний рамки. Для регистрации времени необходимо нажать кнопку «СТОП». Вычислите период колебаний рамки с грузами:  $T = t / N$ .
7. Снимите грузы 5 с рамки и аналогично п. 6. проведите измерения времени  $t_0$ , за которое происходит  $N = 10 \div 15$  колебаний. Для регистрации времени необходимо нажать кнопку «СТОП». Вычислите периоды колебания рамки без грузов:  $T_0 = t_0 / N$
8. Вычислите среднее значение угла максимального отклонения при выстреле:  $\langle \varphi_m \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \varphi_{mi}$ , где  $n$  - количество измерений.
9. Используя среднее значение всех величин, вычислите по формуле [19] скорость снаряда  $\langle V \rangle$ . По формуле [20] оценить интервал надежности измерения скорости и записать результат измерения в таблицу, в стандартном виде.

**Таблица результатов.**

№ опыта	$M$ , г	$m$ , г	$l_1$ , мм	$l$ , мм	$\varphi_m$ , рад	$T$ , с	$T_0$ , с
Погрешности измерений							
1							
2							

3							
Средние значения							
Скорость пули $V = \langle V \rangle + \Delta V$ , м/с	$V =$						

### Контрольные вопросы.

1. Импульс материальной точки, тела.
2. Из чего складывается полная механическая энергия тела?
3. Сформулируйте закон сохранения механической энергии, импульса.
4. Что называется моментом инерции, силы, импульса? В каких единицах измеряются эти величины?
5. Что называется крутильным маятником?
6. Запишите дифференциальное уравнение вращения рамки маятника.
7. Запишите формулу для определения периода колебаний рамки маятника.
8. Из чего складывается полная энергия маятника?
9. Выведите формулу для определения скорости пули, в данной работе.

## Лабораторная работа № 8. Определение коэффициента вязкости жидкости методом Стокса.

**Цель работы:** Определение коэффициента вязкости жидкости с использованием закона Стокса.

### 1. Теоретическое введение

Часть механики, занимающаяся изучением движения жидкости, называется гидродинамикой.

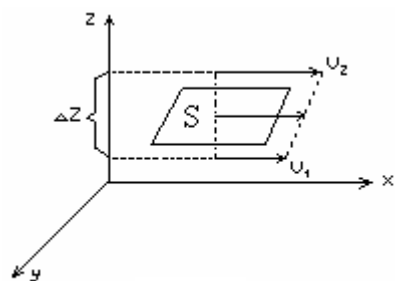


Рис. 1

Основные законы гидродинамики (теорема о неразрывности струи, уравнение Бернулли и д.) получены для так называемой «идеальной жидкости», которая должна быть абсолютно несжимаемой. Идеальная жидкость служит лишь более или менее хорошим приближением к реальным жидкостям.

Всякая реальная жидкость обладает вязкостью или внутренним трением, т.е. свойство оказывать сопротивление перемещению одних слоев жидкости относительно других. Со стороны слоя, движущегося более быстро, на слой, движущийся медленнее, действует ускоряющая сила и, наоборот, со стороны медленного слоя на более быстрый действует задерживающая сила. Эти силы направлены по касательной к поверхности слоев.

Пусть два слоя жидкости (рис. 1), отстоящие друг от друга на расстоянии  $\Delta Z$ , имеют соответственно скорости,  $U_1$  и  $U_2$ . Положим  $U_2 - U_1 = \Delta U$ . Направление, в котором отсчитывается  $\Delta Z$ , перпендикулярно к скорости течения слоёв.

Предел отношения  $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{\Delta Z} = \frac{dU}{dZ}$  показывает, как быстро меняется скорость течения жидкости при переходе от слоя к слою и называется градиентом скорости.

**Сила внутреннего трения**, действующая между двумя слоями с поверхностью соприкосновения слоёв  $S$ , пропорциональна градиенту скорости, площади рассматриваемой поверхности и определяется законом Ньютона для жидкостей и газов.

$$F = \eta \frac{dU}{dZ} S \quad [1]$$

где  $\eta$  - коэффициент вязкости жидкости, измеряется в  $H \cdot c / m^2$ .

**Коэффициентом вязкости** жидкости называется сила внутреннего трения, возникающая на единице площади поверхности соприкасающихся слоёв, движущихся с градиентом скорости, равным единице и весьма сильно зависит от температуры.

### Описание установки и расчетные формулы.

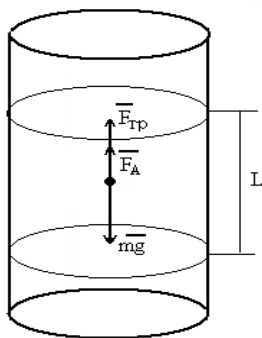


Рис. 2

Установка представляет собой вертикально установленный стеклянный цилиндр, заполненный до краев, вязкой жидкостью – глицерином. На боковой поверхности цилиндра, расположены две метки, на расстоянии  $L$  друг от друга (рис. 2).

Для нахождения коэффициента вязкости используется метод Стокса, основанный на измерении времени падения в жидкости твёрдого шарика малых размеров.

На шарик, диаметром  $d = 2r$  и плотностью  $\rho_{ш}$ , падающий в вязкой жидкости, плотностью  $\rho_{ж}$ , действуют три силы:

1. Сила тяжести:

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{ш} V \cdot \vec{g} = \rho_{ш} \frac{4}{3} \pi \cdot r^3 \cdot \vec{g} = \rho_{ш} \frac{1}{6} \pi \cdot d^3 \cdot \vec{g}; \quad [2]$$

2. Выталкивающая сила Архимеда (равная весу вытесненной шариком жидкости):

$$\vec{F}_A = -\rho_{ж} V \cdot \vec{g} = -\rho_{ж} \frac{1}{6} \pi \cdot d^3 \cdot \vec{g}; \quad [3]$$

3. Сила внутреннего трения, определяемая законом Стокса:

$$\vec{F}_{мп} = -6\pi \cdot \eta \cdot r \cdot \vec{U} = -3\pi \cdot \eta \cdot d \cdot \vec{U}, \quad [4]$$

где  $\vec{U}$  - вектор скорости движения шарика.

В первый момент времени, когда сила тяжести превышает сумму выталкивающей силы и силы трения, шарик падает ускоренно. Однако, при увеличении скорости падение  $U$  возрастает сила вязкого трения. Через некоторое время равнодействующая всех сил, действующих на шарик, становится равной 0;

$$\vec{P} + \vec{F}_A + \vec{F}_{Тр} = 0 \quad [5]$$

и устанавливается постоянная скорость падения. С учетом направления действия сил (рис.2), равенство можно записать в виде:

$$P - F_A - F_{мп} = 0. \quad [6]$$

Подставляя [2], [3] и [4] в выражение [6] находим коэффициент вязкости  $\eta$ :

$$\eta = \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж}) \cdot g \cdot d^2}{18 \cdot U} \quad [7]$$

где  $g = 9,80 \text{ м/с}^2$  – ускорение свободного падения.

Учтем, что скорость равномерного падения шарика в жидкости:  $U = L/t$ , где  $L$  – расстояние, пройденное шариком (рис. 2.),  $t$  – время его падения. Тогда получим:

$$\eta = \frac{(\rho_{ш} - \rho_{ж}) \cdot g \cdot d^2 \cdot t}{18 \cdot L} \quad [8]$$

## 2. Выполнение работы

### Приборы и принадлежности.

1. Стеклянный цилиндр с исследуемой жидкостью.
2. Набор шариков.
3. Микрометр.
4. Линейка.
5. Секундомер.



## 6. Термометр.

1. Определить по термометру температуру воздуха в лаборатории. Измерить линейкой расстояние  $L$  между метками на цилиндре с точностью до  $\Delta L = 1$  мм.
2. Измерить диаметр шарика с помощью микрометра.
3. Опустить шарик в цилиндр с жидкостью и определить время падения шарика между метками на цилиндре с помощью секундомера.
4. Повторить пункты 3,4 не менее 5 раз и вычислить средние арифметические значения диаметра шарика  $\langle d \rangle$  и времени его падения  $\langle t \rangle$ .
5. Найденное значение  $\langle d \rangle$  и  $\langle t \rangle$  подставить в формулу [8] и вычислить среднее значение коэффициента вязкости  $\langle \eta \rangle$ . Значения  $\rho_{ш}$ ,  $\rho_{ж}$  приведены в таблице, прилагаемой к лабораторной установке.
6. Определить абсолютные значения ошибок в измерении диаметра и времени падения шарика для каждого опыта по формулам:

$$\Delta t_i = |t_{cp} - t_i|; \Delta d_i = |d_{ch} - d_i|$$

7. Вычислить ошибки в определении  $d$  и  $t$  для коэффициента надёжности  $\alpha = 0.95$  и  $n = 5$  по формулам:

$$\Delta d = 2,78 \sqrt{\frac{(\Delta d_1)^2 + \dots + (\Delta d_5)^2}{20}}; \Delta t = 2,78 \sqrt{\frac{(\Delta t_1)^2 + \dots + (\Delta t_5)^2}{20}}$$

8. Пренебрегая ошибками в определении  $\rho$  и  $g$ , вычислить суммарную относительную погрешность коэффициента вязкости с помощью выражения:

$$\delta \eta \approx 2 \frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta t}{t} + \frac{\Delta L}{L}$$

9. Вычислить интервал надёжности определения коэффициента вязкости по формуле:

$$\Delta \eta = \langle \eta \rangle \delta \eta$$

10. Данные измерений и вычислений занести в таблицу. Окончательный результат записать в виде:  $\eta = \eta_{cp} \pm \Delta \eta; p = 0.95$ .

### Таблица результатов

№ опыта	$L$ , м	$d$ , мм	$t$ , с	$\langle d \rangle$ , мм	$\langle t \rangle$ , с	$\Delta d_i$ , мм	$\Delta t_i$ , с	$\Delta d$ , мм	$\Delta t$ , с	$\eta_{cp}$	$\delta \eta$	$\Delta \eta$
1												
2												
3												
4												
5												
$\eta = (\eta_{cp} \pm \Delta \eta) \text{ Н} \cdot \text{с} / \text{м}^2$		$\eta =$										

### Контрольные вопросы

1. Закон Ньютона для силы внутреннего трения вязких жидкостей.
2. Физический смысл коэффициента вязкости и единицы его измерения.
3. Сила, действующая на тело, погруженное в жидкость или газ. Закон Архимеда.
4. Математическая запись закона Стокса. От чего зависит сила сопротивления?
5. Условие равномерного и неравномерного движения тела в вязкой жидкости.
6. Вывод формулы [8] для определения коэффициента вязкости с использованием закона Стокса.

### Литература

1. Савельев И.В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1978, т.1, с.210-219.
2. Трофимова Т.И. Курс физики. – М: Высшая школа 1990, с.55-57.

## Лабораторная работа № 9. Определение отношения теплоемкостей идеального газа методом Клемана - Дезорма

**Цель работы:** Определение коэффициента Пуассона методом адиабатического сжатия.

### 1. Теоретическое введение

**Идеальным газом** называется система молекул, которые находятся в непрерывном хаотическом движении и между ними отсутствуют силы межмолекулярного взаимодействия. Вдали от области фазовых превращений реальные газы можно считать идеальными.

Число параметров, определяющих положение и ориентацию молекул газа в пространстве, будем называть числом ее степеней свободы -  $i$ .

Согласно положению о равномерном распределении энергии по степеням свободы, на каждую степень свободы молекулы приходится энергия равная:  $kT/2$ , поэтому средняя энергии молекулы газа, должна равняться:

$$\bar{\epsilon} = \frac{i}{2}kT, \quad [1]$$

где  $i$  - сумма поступательных, вращательных и удвоенного числа колебательных степеней свободы,  $k = 1,38 \cdot 10^{-23}$  Дж/К - постоянная Больцмана.

Для молекул с жесткими межатомными связями (нет колебательных степеней свободы) имеем:

1. Одноатомная молекула -  $i = 3$  (три поступательные степени свободы).
2. Двухатомная молекула -  $i = 5$  (три поступательные и две вращательные степени свободы).
3. Трехатомная молекула -  $i = 6$  (три поступательные и три вращательные степени свободы).

Внутренняя энергия одного моля идеального газа, содержащего  $N_A = 6,023 \cdot 10^{23}$  молекул, равна:

$$U_\mu = N_A \cdot \bar{\epsilon} = \frac{i}{2} N_A kT = \frac{i}{2} RT \quad [2]$$

где  $R = N_A k = 8,31$  Дж/моль · К - универсальная газовая постоянная. Для  $\nu = N/N_A$  (где  $N$  - общее число молекул) молей газа имеем:

$$U = \frac{i}{2} \nu \cdot RT \quad [3]$$

**Уравнение состояния идеального газа** (уравнение Менделеева - Клапейрона) связывает  $p, V, T$  - давление, объем и абсолютную температуру газа:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \quad [4]$$

где  $m$  - масса газа,  $\mu$  - молярная масса газа (масса одного моля).

**Теплоёмкостью тела** называется величина, численно равная количеству теплоты  $Q$ , которую необходимо ему сообщить, чтобы изменить температуру  $T$  на один градус Кельвина:

$$C = \frac{dQ}{dT} \quad [5]$$

где  $dT$  - изменение температуры тела,  $dQ$  - количество теплоты, сообщённое телу.

Поделив [5] на массу газа  $m$  и на молярную массу  $\mu$ , получим, соответственно **удельную и молярную** теплоемкости:

$$c = \frac{dQ}{m dT}; \quad C_{\mu} = \frac{dQ}{\mu dT} \quad [6]$$

Для определения теплоёмкости **идеального газа** воспользуемся **первым началом термодинамики**, согласно которому количество теплоты -  $dQ$ , переданное системе затрачивается на изменение её внутренней энергии  $dU$  и совершение системой работы  $dA = pdV$  против внешних сил:

$$dQ = dU + dA = dU + pdV \quad [7]$$

Из выражения [7], следует, что величина теплоемкости зависит от способа нагревания:

**Изохорный процесс:** ( $V = const$ )

При изохорном процессе изменение объема  $\Delta V = 0$ , в этом случае с учётом равенств [7] и [3] получим величину теплоёмкости при постоянном объеме:

$$C_v = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} = \frac{i}{2} \nu \cdot R \quad \text{или} \quad dU = C_v dT = \frac{i}{2} \nu \cdot R dT \quad [8]$$

**Изотермический процесс:** ( $T = const$ )

В этом случае изменение температуры  $\Delta T = 0$ , и первое начало термодинамики имеет вид:

$$dQ = dA = pdV$$

Так как, температура не меняется, теплоемкость  $C_T = \infty$ . Изотермический процесс описывается уравнением Бойля-Мариотта:

$$pV = const \quad [9]$$

**Изобарный процесс:** ( $p = const$ )

При изобарном процессе:

$$C_p = \frac{dU}{dT} + \frac{pdV}{dT} \quad [10]$$

После дифференцирования уравнения Менделеева-Клайперона [4] при постоянном давлении получим:

$$dA = pdV = \frac{m}{\mu} R dT = \nu \cdot R dT \quad [11]$$

Выражение [11] позволяет выяснить физический смысл универсальной газовой постоянной: она численно равна работе совершаемой одним моле идеального газа ( $m/\mu = 1$ ) при повышении его температуры на  $1K$ , при изобарном процессе.

Подставив [11] в [10] и, учитывая [8] найдем теплоемкость при изобарном процессе:

$$C_p = C_v + \nu \cdot R = \frac{i+2}{2} \nu \cdot R \quad [12]$$

Разделив [12] на число молей  $\nu = m/\mu$ , получим **уравнение Майера**, связывающее молярные теплоёмкости идеального газа (теплоёмкости одного моля вещества):

$$C_{p\mu} = C_{v\mu} + R \quad [13]$$

Поделив [12] на [8], найдем отношение теплоемкостей  $\gamma = C_p/C_v$  (коэффициент Пуассона) для идеального газа:

$$\gamma = (i+2)/i \quad [14]$$

Используя [14], находим теоретические значения  $\gamma$  для идеальных газов:

$$\gamma = (3+2)/3 \approx 1,67 \quad \text{для одноатомного } (i = 3),$$

$$\gamma = (5+2)/5 = 1,4 \quad \text{для двухатомного } (i = 5),$$

$$\gamma = (6+2)/6 \approx 1,33 \quad \text{для трехатомного идеального газа } (i = 6).$$

Для экспериментального определения этого отношения Клеман и Дезорм предложили метод адиабатического сжатия.

**Адиабатическим** называется процесс, протекающий без теплообмена с окружающей средой ( $dQ = 0$ ), для такого процесса первое начало термодинамики, с учетом [8] имеет вид:

$$dU + dA = C_v dT + pdV = 0 \quad [15]$$

отсюда следует, что при адиабатическом изменении объема газ совершает работу за счёт изменения своей внутренней энергии. Поэтому при таком процессе температура газа изменяется: при сжатии повышается, а при расширении уменьшается.

Решая совместно [15] и [4] можно получить уравнение Пуассона для адиабатического процесса:

$$pV^\gamma = \text{const} \quad [16]$$

Для определения  $\gamma$  по методу Клемана-Дезорма нужно осуществить замкнутый процесс (цикл), диаграмма которого приведена на рис. 1.

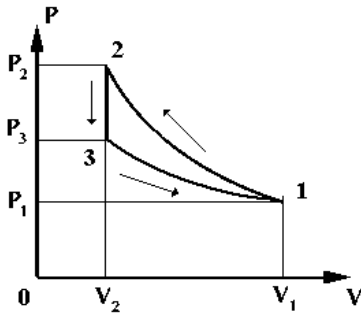


Рис. 1

Уравнение Пуассона для адиабатического сжатия кривая (1-2):

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad [17]$$

при этом температура и давление газа увеличиваются до  $T_2$  и  $p_2$ , соответственно. Если при постоянном объеме  $V_2$  температуру уменьшить до первоначального значения  $T_1$ , то давление уменьшится от  $p_2$  до  $p_3$ , (отрезок 2-3). При последующем изотермическом процессе 3-1, который описывается выражением [9], газ возвращается в исходное состояние.

$$p_1 V_1 = p_3 V_2 \quad [18]$$

возведем равенство [18] в степень  $\gamma$  и разделим его на равенство [17]. После сокращения на  $V^\gamma$  получим:

$$\left(\frac{p_3}{p_1}\right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1} \quad \text{или} \quad \gamma = \frac{\ln(p_2/p_1)}{\ln(p_3/p_1)} \quad [19]$$

### Описание установки и расчетные формулы

Для осуществления метода Клемана-Дезорма используется прибор (рис. 2) состоящий из большого стеклянного баллона Б, соединенного с насосом Н и водяным манометром М. На пробке баллона имеется клапан К, при открытии которого баллон сообщается с атмосферным воздухом. Клапан открывается рычагом. Если при открытом клапане К медленно откачать из баллона воздух, то температура в нем изменится, а давление будет меньше атмосферного  $p_0$  на величину  $p_1'$ , т.е.

$$p_1 = p_0 - p_1' \quad [20]$$

это состояние соответствует точке 1 (рис. 1). Величина  $p_1'$  измеряется манометром М, по разности уровней жидкости в манометре  $h$ . Для осуществления адиабатического процесса 1-2 нужно на короткое время открыть клапан К, при этом давление воздуха в баллоне сравняется с атмосферным.

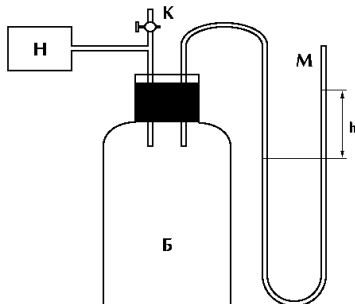


Рис. 2

Если после откачивания в баллоне объемом  $V_1$  остается масса воздуха  $m$ , то при открывании клапана в баллон войдет дополнительная порция воздуха, а масса  $m$  займет меньший объем  $V_2$  при давлении  $p_2$ . Т.к. процесс кратковременный и заметного теплообмена газа в баллоне с окружающей средой нет, то процесс можно считать близким к адиабатному. После адиабатического сжатия (кривая 1-2) температура воздуха в баллоне повышается до  $T_2$  (точка 2).

В результате теплообмена температура газа в баллоне через 2-3 мин. практически станет равной комнатной, а давление будет меньше атмосферного (точка 3):

$$p_3 = p_0 - p_2' \quad [21]$$

процесс теплообмена (2-3) происходит при постоянном объеме. Конечное состояние этого процесса соответствует точке 3. т.к. точки 1 и 3 соответствуют одинаковой температуре, то они должны лежать на одной изотерме, для которой выполняется выражение [18].

Т.к. давление измеряется жидкостным манометром, то  $p = \rho \cdot g \cdot h$  и формулы [20] и [21] можно заменить на значения давления в мм водяного столба:

$$p_1 = H - h_1 \text{ и } p_3 = H - h_2 \quad [22]$$

Для определения  $\gamma$  через  $h_1$  и  $h_2$  подставим последние выражения в [19] и разложим  $\ln p_1$  и  $\ln p_2$  в ряд Тейлора и, ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим ( $p_2 = H$ ):

$$\gamma = \frac{h_1}{h_1 - h_2} \quad [23]$$

значения  $\gamma$ , найденные по формуле [23], сильно зависят от времени, на которое открывается клапан 3. это связано с тем, что чем меньше время, тем меньшее количество теплоты отдает газ, через стенки сосуда и тем ближе процесс к адиабатическому, а измеренное значение  $\gamma$  ближе к истинному.

## 2. Выполнение работы

### Приборы и принадлежности.

1. Стеклянная колба с клапаном.
  2. Водяной манометр.
  3. Электронный секундомер.
1. Включите электронный секундомер. Запуск и остановка секундомера осуществляется рукояткой клапана К (рис.2). Установите нулевые показания специальной кнопкой, расположенной на секундомере.
  2. Откачайте насосом воздух из баллона до величины разностей в манометре около 22 см. воздух в баллоне при этом охлаждается, поэтому нужно выждать 2-3 мин, пока благодаря теплообмену, температура в баллоне не станет комнатной. После этого отсчитайте и запишите разность уровней жидкости  $h_1$  в манометре. Отсчет следует брать по нижнему краю мениска.
  3. Нажмите рукоятку клапана К, и по секундомеру, проследите чтобы время, на которое открывается кран было не больше одной секунды. При этом сосуд сообщается с атмосферой и воздух в баллоне нагревается. Выждав 2-3 минуты, пока температура воздуха в баллоне не станет равной температуре окружающей среды, измеряют манометром разность давлений  $h_2$ .
  4. Повторить пункты 2-3 не менее 5 раз для различных интервалов времени (0,1 с., 0,2 с., 0,3 с., 0,4 с., 0,5 с.) на которые открывается кран. Результаты измерений занесите в таблицу:
  5. По формуле [23] определите 5 значений  $\gamma$  и постройте по точкам зависимость  $\gamma(t)$ , определите точку пересечения проведенной линии с осью ординат и найдите истинное значение  $\gamma_{ист}$
  6. Рассчитайте относительную погрешность полученного и теоретического значения  $\gamma$  для двухатомного идеального газа  $\gamma = 1,4$ , по формуле:  $\varepsilon = (\gamma_{ист} - 1,4) \cdot 100\% / 1,4$

### Таблица результатов

№ опыта	$h_1$ , мм	$h_2$ , мм	$t$ , с	$\gamma$
1				
2				
3				

4				
5				
$\gamma_{ист}$	$\gamma_{ист} =$			
$\mathcal{E}, \%$	$\mathcal{E} =$			

### Контрольные вопросы

1. Какой газ называют идеальным? При каких условиях реальные газы можно рассматривать как идеальные?
2. Что называется числом степеней свободы молекул газа?
3. Положение о равномерном распределении энергии по степеням свободы.
4. Чему равна средняя энергия молекулы газа? Внутренняя энергия идеального газа.
5. Уравнение состояния идеального газа. Какие параметры входят в это уравнение, их физический смысл.
6. Что называется теплоемкостью тела? Удельной и молярной теплоемкостью вещества? Единицы измерения.
7. Первое начало термодинамики и физический смысл его параметров. Работа расширения газа.
8. Почему теплоемкость газа зависит от условий нагревания?
9. Какой процесс называется изохорным, изотермическим, изобарным?
10. Какой процесс называется адиабатическим?
11. Вывести уравнение Майера [13]. Теоретическое значение коэффициента Пуассона  $\gamma$  для идеального газа с различным числом атомов в молекуле [14].
12. Из каких процессов состоит цикл в данной работе? Как определяется  $\gamma = C_p / C_v$  в данной работе?

### Литература

1. А.А. Детлаф, Б.М. Яровский. Курс физики, М.: Высшая школа, 1989. с 100-103.
2. Р.В. Телеснин. Молекулярная физика, М.: Высшая школа, 1973. с. 107-108.
3. Т.И. Трофимова. Курс физики, М.: Высшая школа, 1990.

## Лабораторная работа № 10. Определение модуля сдвига материала пружины с помощью пружинного маятника.

**Цель работы** – Изучение видов упругих деформаций и определение модуля сдвига материала пружины с помощью пружинного маятника.

### 1. Теоретическое введение.

Под действием сил, происходит деформация тел, т. е. изменение их размеров и формы. Если после прекращения действия сил, тело принимает первоначальный размер и форму, деформация называется **упругой**. Упругие деформации происходят в том случае, если сила, приложенная к телу, не превосходит некоторый, определенный для каждого тела предел. При превышении этого предела тело получает остаточные или пластические деформации, сохраняющиеся и после прекращения действия силы на тело.

Величина, равная отношению силы к величине поверхности, на которую действует сила, называется напряжением. Благодаря взаимодействию частей тела друг с другом напряжение передается во все точки тела, и весь объем тела оказывается в напряженном состоянии. Если сила направлена по нормали к поверхности, напряжение называется **нормальным**  $\sigma$ . Если сила направлена по касательной к поверхности, напряжение называется **тангенциальным**  $\tau$ .

$$\sigma = \frac{F_n}{S} \text{ и } \tau = \frac{F_t}{S} \quad [1]$$

В пределах упругости, величина относительной деформации  $\varepsilon$  тела пропорциональна, приложенному напряжению (закон Гука):

$$\varepsilon = \chi \cdot \sigma \text{ или } \varepsilon = \chi' \cdot \tau \quad [2]$$

где  $\chi$  и  $\chi'$  - коэффициенты пропорциональности, определяемые формой, размерами и материалом, из которого изготовлено тело.

Все возможные виды упругих деформаций твердого тела (растяжение, сжатие, сдвиг, изгиб, кручение), могут быть сведены к двум основным: растяжению (или сжатию) и сдвигу.

### Деформация растяжения (или сжатия).

Если к противоположному концу, закрепленного однородного стержня (рис. 1), длиной  $L_0$  и постоянного сечения  $S$  приложить направленную вдоль его оси силу  $\vec{F}$ , то длина стержня получит приращение  $\Delta L = L - L_0$ , где  $L$  - новая длина стержня. Величина:  $\varepsilon = \Delta L / L_0$  является мерой относительной деформации тела.

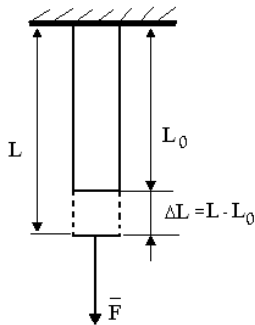


Рис. 1

В пределах упругой деформации величина относительной деформации  $\varepsilon$  пропорциональна приложенному нормальному напряжению (закон Гука):

$$\varepsilon = \chi \cdot \sigma = \frac{\sigma}{E} \text{ или } \sigma = E \cdot \varepsilon \quad [3]$$

где  $E = 1/\chi$  - модуль Юнга, численно равный нормальному напряжению, удлиняющему стержень в два раза ( $\varepsilon = 1$ ). Учитывая, что  $\varepsilon = \Delta L / L$ , перепишем [3] в виде:

$$\Delta L = \frac{\sigma \cdot L}{E} = \frac{F \cdot L}{E \cdot S} = \frac{F}{E \cdot S/L} = \frac{F}{k} \text{ или } F = k \cdot \Delta L \quad [4]$$

где  $k = E \cdot S / L$  - коэффициент жесткости или просто жесткость тела.

### Деформация сдвига.

Сдвигом называется деформация, при которой все плоские слои твердого тела, параллельные некоторой плоскости (плоскости сдвига), смещаются параллельно друг другу (рис. 2).

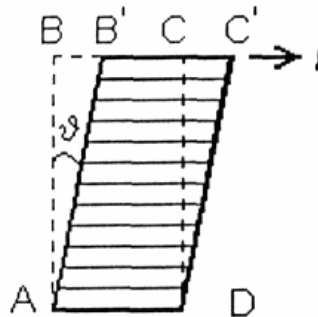


Рис. 2

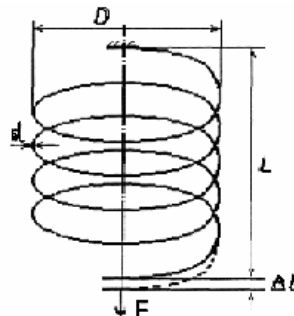


Рис. 3

Сдвиг происходит под действием силы  $\vec{F}$ , приложенной параллельно плоскости сдвига BC. Мерой относительной деформации при этом является тангенс угла сдвига  $tg \vartheta = AB / BB' \approx \vartheta$  (относительный сдвиг).

При упругих (обратимых) деформациях, относительный сдвиг пропорционален касательному напряжению (выполняется закон Гука):

$$\tau = \frac{F}{S} = G \cdot \vartheta \quad [5]$$

где  $S$  - площадь грани  $BC$ ,  $G$  - модуль сдвига, численно равный касательному напряжению, вызывающему относительный сдвиг, равный единице.

В данной работе определяется модуль сдвига материала, из которого изготовлена винтовая пружина (рис. 3), основными геометрическими параметрами которой являются, диаметр проволоки  $d$ , диаметр витка пружины  $D$  и число витков  $N$ .

Под действием растягивающей силы  $F$ , перпендикулярной виткам, длина пружины  $L$  увеличивается согласно закону Гука [4] на величину

$$\Delta L = F/k \quad [6]$$

где  $k$ - жесткость пружины.

Удлинение пружины  $\Delta L$ , складывается из деформаций сдвига по всей длине проволоки, из которой она изготовлена и определяется растягивающей силой, модулем сдвига и геометрическими размерами пружины:

$$\Delta L = \frac{F \cdot 8 \cdot D^3 \cdot N}{G \cdot d^4} \quad [7]$$

Решая совместно [6] и [7], находим связь между модулем сдвига  $G$  и жесткостью пружины  $k$ :

$$G = k \frac{8 \cdot D^3 N}{d^4} \quad [8]$$

### Пружинный маятник.

**Пружинным маятником** будем называть тело, подвешенное к пружине, жестко закрепленной верхним концом к неподвижной опоре, и способное совершать колебания в вертикальной плоскости под действием силы тяжести (рис. 4).

На тело, массой  $m$ , подвешенное на пружине действуют две силы: постоянная по величине сила тяжести  $F_T = mg$ , определяющая длину пружины в состоянии равновесия  $L_0$  и сила упругости пружины, выражаемая законом Гука, в виде:  $F_{уп} = -k \cdot x$ , где  $x = L - L_0$  - величина отклонения тела от положения равновесия. Уравнение движения тела (второй закон Ньютона):

$$a = -\frac{k \cdot x}{m} \quad \text{или} \quad x'' + \omega_0^2 x = 0 \quad [9]$$

где  $x'' = a$  - ускорение тела,  $\omega_0^2 = k/m$  - собственная частота колебания маятника. Решение данного уравнения:

$$x(t) = x_m \cdot \cos(\omega_0 t + \delta), \quad [10]$$

где  $x_m$  - амплитуда колебаний (максимальный угол отклонения от вертикали),  $\delta$  - начальная фаза колебания. Таким образом, пружинный маятник совершает гармонические колебания с частотой  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  и периодом:

$$T = 2\pi / \omega_0 = 2\pi \sqrt{m/k} \quad [11]$$

### Описание установки и расчетные формулы

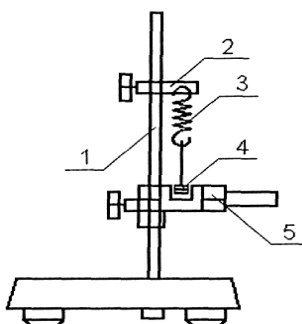


Рис. 4

Для определения модуля сдвига в работе используется пружинный маятник, показанный на рис. 3.

На штативе 1 установлен кронштейн 2 с узлом крепления вертикально подвешенных сменных пружин 3. К пружине подвешивается наборный груз 4. Измерение периодов колебаний груза производится с помощью фотодатчика 5.

Выведенный из положения равновесия груз массой  $m$  совершает гармонические колебания [10] с периодом  $T$ .

Используя [11], выразим жесткость пружины через период



колебаний маятника:

$$k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} \quad [12]$$

Подставив [12] в [8], находим формулу для расчета модуля сдвига материала, из которого изготовлена пружина:

$$G = \frac{32 \cdot \pi^2 D^3 N \cdot m}{T^2 d^4} \quad [13]$$

Таким образом, измерив, период колебаний и воспользовавшись формулой [13], можно найти модуль сдвига  $G$ .

### Интервал надежности.

Интервал надежности можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения:

$$\Delta G \approx t_{p,n} \left( 3 \frac{\Delta D}{D} + 4 \frac{\Delta d}{d} + 2 \frac{\Delta T}{T} + \frac{\Delta m}{m} \right) < G > \quad [14]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора интервала надежности (доверительной вероятности)  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $G = < G > \pm \Delta G$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнение работы.

### Приборы и принадлежности:

1. Штатив с кронштейном и фотодатчиком
2. Электронный таймер.
3. Пружина
4. Груз и добавочные грузы.
5. Штангенциркуль.

Кронштейн 2 с вертикально подвешенной пружиной 3 закрепить на вертикальной стойке 1 таким образом, чтобы наборный груз 4, подвешенный к пружине, своей нижней плоскостью закрывал оптическую ось фотодатчика 5 на 2-3 мм (оптическая ось совпадает с рисками на фотодатчике).

1. Измерить все параметры пружины  $D, d, N$ .
2. Оттянуть груз вниз на 3-5 мм и отпустить. При этом груз начинает совершать колебательные движения на пружине. Измерить время  $t$  для  $n = 10 - 15$  полных колебаний маятника. По формуле  $T = t/n$  рассчитать период колебаний  $T$ .
3. Повторить пункт 2 не менее трех раз, записывая данные в таблицу результатов.
4. Повторить задание п. 2 - 3 не менее трех раз, увеличивая массу груза  $m$ . Все полученные данные занести в таблицу результатов.
5. Для каждого значения  $m$  вычислить модуль сдвига  $G(m)$  по формуле [13] и записать в таблицу результатов.

6. Найти среднее значение:  $< G > = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i(m)$ , где  $n$  - число измерений с разными

значениями массы груза  $m$ . По формуле [14], оценить интервал надежности и записать результат измерений в виде:  $G = < G > \pm \Delta G$  в последнюю строку таблицы.

**Таблица результатов.**

Параметры пружины	$D =$ , мм	$d =$ , мм	$N =$
№ опыта	$m$ , г	$T$ , с	$\langle T \rangle$ , с
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
$G = \langle G \rangle \pm \Delta G$ , Н/м <sup>2</sup>	$G =$ , $p =$ ;		

**Контрольные вопросы.**

1. Виды деформаций.
2. Нормальное и тангенциальное напряжение. Единицы измерения.
3. Сформулируйте закон Гука.
4. Деформация растяжения. Модуль Юнга. Единицы измерения.
5. Деформация сдвига. Модуль сдвига. Единицы измерения.
6. Растяжение пружины. Связь модуля сдвига и жесткости пружины.
7. Пружинный маятник. Уравнение колебаний. Частота и период колебаний.
8. Как в данной работе определяется модуль сдвига? Расчетная формула.

**Литература.**

Курс общей физики под ред. Савельева И. В. т. 1.

**Лабораторная работа № 11. Определение модуля Юнга по стреле прогиба прямоугольной пластины.**

**Цель работы** – Определение модуля Юнга по стреле прогиба пластины.

**1. Теоретическое введение.**

Если прямой упругий стержень обоими концами свободно положить на твердые опоры и нагрузить в середине грузом весом  $P$ , то середина стержня опустится, т. е. стержень согнется. При таком изгибе верхние слои стержня будут сжиматься, нижние - растягиваться, а некоторый средний слой, который называют нейтральным слоем, сохранит длину и только претерпит искривление.

Перемещение  $\lambda$ , которое получает середина стержня, называется **стрелой прогиба**. Стрела прогиба тем больше, чем больше нагрузка, и, кроме того, она зависит от формы и размеров стержня и от его модуля упругости.

Для деформаций растяжения и сжатия модуль упругости называется модулем Юнга и численно равен напряжению (т. е. упругой силе, приходящейся на единицу площади поперечного сечения тела), возникающему в образце при увеличении (уменьшении) его длины в два раза.

Найдем связь между стрелой прогиба и характеристиками упругого стержня. В данной работе используется пластина прямоугольного сечения размерами  $L$  (длина),  $h$  (высота),  $b$  (ширина).

Под воздействием внешней силы пластина искривляется, и ее форма может быть описана функцией  $y(x)$  (см. рис. 1). Возникающие в пластине силы упругости пропорциональны кривизне пластины, т. е. второй производной  $y''(x)$ . Условие равновесия имеет вид:

$$E \cdot I \cdot y''(x) = M(x) \quad [1]$$

где  $E$  - модуль Юнга;  $I = \int y^2 dS = \frac{b \cdot h^3}{12}$  - коэффициент (геометрический момент инерции) прямоугольного сечения пластины, относительно осевой линии), определяемый геометрией пластины;  $M(x) = \frac{P}{2} x$  - изгибающий момент сил.

Таким образом, получаем дифференциальное уравнение для формы пластины:  $y''(x) = \frac{P}{2 \cdot E \cdot I} x$ , интегрируя которое, находим:  $y'(x) = \frac{P}{4 \cdot E \cdot I} x^2 + C$ .

Константу интегрирования  $C$  определим из условия равенства нулю наклона пластины в ее центре:  $y'(L/2) = 0$ , откуда  $C = -\frac{PL^2}{16 \cdot E \cdot I}$ . После второго интегрирования имеем:

$$y(x) = \frac{P \cdot x^3}{12 \cdot E \cdot I} - \frac{P \cdot L^2 \cdot x}{16 \cdot E \cdot I} \quad [2]$$

Стрела прогиба  $\lambda$  по модулю равна смещению середины пластины:

$$\lambda = -y(L/2) = \frac{P \cdot L^3}{4 \cdot E \cdot b \cdot h^3} \quad [3]$$

Подставляя в [3]:  $P = mg$ , где  $m$  - масса груза,  $g = 9,80 \text{ м/с}^2$  - ускорение свободного падения, окончательно находим:

$$E = \frac{m \cdot g \cdot L^3}{4 \cdot \lambda \cdot b \cdot h^3} \quad [4]$$

### Интервал надежности.

Интервал надежности можно оценить по правилам расчета погрешности косвенного измерения:

$$\Delta E \approx t_{p,n} \left( \frac{\Delta m}{m} + 3 \frac{\Delta L}{L} + \frac{\Delta \lambda}{\lambda} + \frac{\Delta b}{b} + 3 \frac{\Delta h}{h} \right) < E > \quad [5]$$

где  $t_{p,n}$  - коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности  $p$  и числа измерений  $n$ .

Записываем результат в виде:  $E = \langle E \rangle \pm \Delta E$ ;  $p =$  ;

## 2. Выполнение работы.

### Приборы и принадлежности:

1. Штатив с кронштейном и часовым механизмом.
2. Исследуемая пластина
3. Груз и добавочные грузы.
4. Штангенциркуль

Установить исследуемую пластину 1 на опоры 2 (см. рис. 2). Установить циферблат часового механизма 3 таким образом, чтобы стрелка показывала на 0.

1. Повесить на скобу 4 гирию 5. По шкале индикатора определить величину прогиба  $\lambda$ . Повторить измерения 3 раза.

- Повторить задание п. 1, увеличивая массу с помощью дополнительных грузов. Повторить измерения 3 раза. Всего провести измерения для 3 значений массы.
- Найти среднее значение величины прогиба соответствующего каждой массе.
- Измерить штангенциркулем размеры пластины  $L, b, h$ .
- Вычислить модуль Юнга исследуемого вещества по формуле [4] при каждой массе гири  $E(m)$ .
- Найти среднее значение модуля Юнга по формуле:

$$\langle E \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E_i(m), \text{ где } n - \text{ число измерений с разными}$$

значениями массы груза  $m$ . По формуле [5], оценить интервал надежности и записать результат измерений в виде:

$$E = \langle E \rangle \pm \Delta E \text{ в последнюю строку таблицы.}$$

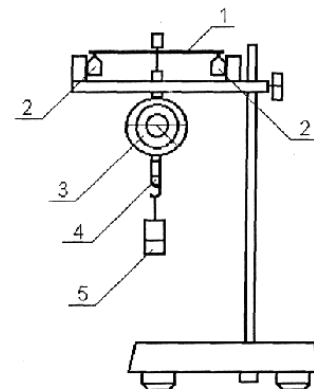


Рис. 2

### Таблица результатов.

Параметры пластины	$L =$ , мм	$b =$ , мм	$h =$ , мм	
№ опыта	$m$ , г	$\lambda$ , мм	$\langle \lambda \rangle$ , мм	$E(m)$ , $H/m^2$
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
$E = \langle E \rangle \pm \Delta E$ , $H/m^2$	$E =$ , $p =$ ;			

### Контрольные вопросы.

- Виды деформаций.
- Нормальное и тангенциальное напряжение. Единицы измерения.
- Сформулируйте закон Гука.
- Деформация растяжения. Модуль Юнга. Единицы измерения.
- Что называют стрелой прогиба?
- Как в данной работе определяется модуль Юнга? Расчетная формула.

**Литература.** Курс общей физики под ред. Савельева И. В. т. 1.