Министерство транспорта Российской федерации
Федеральное агентство железнодорожного транспорта

САМАРСКАЯ ГОСУДАРСТВЕННАЯ АКАДЕМИЯ ПУТЕЙ СООБЩЕНИЯ

Кафедра физика и экологическая теплофизика

Измерения физических величин

Пособие для студентов

САМАРА 2006

УДК 53.08

Измерения физических величин. Методическое пособие для студентов всех специальностей и форм обучения. Авторы: Р. Р. Абдульманов, Каганов Л. И. – Самара: СамГАПС, 2006 – 25с. Табл.-5, Рис.- 5, Библ.-8 наим.

Утверждена на заседании кафедры «Физика и ЭТ» , протокол №
Печатается по решению редакционно-издательского совета академии.

Дана краткая классификация видов измерения и источников погрешностей. Кратко рассмотрены распределения случайных величин Гаусса и Стьюдента и основные принципы расчета погрешностей. Представлены алгоритмы оценки погрешностей прямых и косвенных измерений, рекомендации для построения графиков и их обработки. Кратко рассмотрен метод наименьших квадратов и способы компьютерной обработки результатов измерений

Авторы: Абдульманов Рафаэль Рахимович, Каганов Леонид Исаакович

Рецензент: Ламажапов Хубита Доржиевич

Редактор: Абдульманов Р. Р.

Компьютерная верстка: Абдульманов Р. Р.

Подписано в печать Формат 60x84 1/16
Бумага писчая. Печать оперативная. Усл. п. л.
Тираж экз. Заказ №

Содержание

§1. Физические величины и их измерение.

Физическая величина

Физика - экспериментальная наука. Целью эксперимента является поиск таких параметров физических явлений, которые можно измерить, получив численные значения и сравнение их с предсказаниями проверяемой теории или гипотезы.

Параметры физических объектов и процессов, которые можно прямо или косвенно измерить, называют физическими величинами.

Физические величины можно разделить на две категории:

- величины, характеризующие свойства и состояние тел (масса, объем, плотность, электрическое сопротивление, давление и др.).
- величины, характеризующие явления и процессы, протекающие во времени (линейная скорость, сила тока, работа и т.д.).

Измерить величину – это значит сравнить ее с однородной величиной, принятой за единицу измерения. Например, при измерении линейных размеров предметов (длины, ширины, высоты, диаметра и др.) их сравнивают с метром; при измерении массы тела она сравнивается с килограммом и т. д.

Измерением какой-либо физической величины называется нахождение значения физической величины с помощью специальных технических средств, в результате чего определяется, во сколько раз измеряемая величина больше (меньше) соответствующей величины, принятой за эталон.

Результат измерений выражается определенным числом. Как правило, все результаты измерений записываются в ***таблицу***, с обязательным указанием ***единиц измерения.*** В настоящее время в учебных заведениях России, рекомендовано использовать международную систему единиц измерения (СИ).

Международная система единиц (СИ)

Системой единиц называется совокупность единиц основных и производных величин. Единицы производных величин образуются на основании уравнений, связывающих эти величины с основными.

Международная система единиц (СИ) была принята 21 страной (в том числе Россией) в октябре 1960 г. XI Генеральной международной конференцией по мерам и весам и построена на шести основных единицах и двух дополнительных.

Три первые основные единицы (метр, килограмм, секунда) позволяют образовать производные единицы для всех величин, имеющих чисто механическую природу, а три остальные основные единицы (Ампер, градус Кельвина, кандела) дают возможность образовать производные единицы для величин, не сводимых к механическим: Ампер – для электрических и магнитных величин, градус Кельвина – для тепловых величин, кандела для величин в области фотометрии.

Угловые единицы (радиан и стерадиан) не могут быть введены в число основных, так как это вызвало бы затруднения в трактовке размерностей величин, связанных с вращением (дуги окружностей, площади круга, работы пары сил и т. д.). По существу эти единицы являются производными, хотя и с той особенностью, что имеют одинаковый размер в различных системах единиц.

В таблице 1, приведены основные и дополнительные единицы системы СИ.

Таблица 1

Физическая величина	Единица		
	Наименование	Обозначение	
		русское	международное
Длина	метр	м	m
Масса	килограмм	кг	kg
Время	секунда	с	s
Сила электрического тока	Ампер	А	A
Термодинамическая температура	Кельвин	К	K
Количество вещества	моль	моль	mol
Сила света	кандела	кд	cd
Плоский угол	радиан	рад	rad
Телесный угол	стерадиан	ср	sr

Размеры основных единиц устанавливаются определениями. Размеры производных единиц определяются по уравнениям между величинами, взятыми в простейшей форме.

Например, единица скорости образуется путем замены в выражении для скорости равномерного движения величин их единицами:

$$[v] = (1м) : (1\ с)$$

Это выражение является сокращенной записью словесного определения единицы скорости, т. е. скорости такого равномерного движения, при котором расстояние, равное 1 м, преодолевается за время, равное 1 сек.

Для образования производных единиц вместо уравнений между величинами можно использовать формулы размерности, однако этот способ является в большей степени формальным, так как в сложных случаях не позволяет проследить механизм образования единицы и сформулировать ее словесное определение.

С 1995 года принято соглашение писать наименования единиц, образованных по именам ученых, с заглавной буквы.

Кроме основных, дополнительных и производных единиц допускается применение кратных и дольных единиц, образованных из единиц СИ с помощью десятичных приставок, т. е. приставок, соответствующих целым (положительным и отрицательным) степеням десяти.

Наименования кратных и дольных единиц образуются присоединением к наименованиям единиц, соответствующих приставок. Если наименование единицы уже содержит приставку, как, например, килограмм, то новая приставка присоединяется к простому наименованию (т. е. взятому без приставки) – в данном случае к наименованию грамм: миллиграмм, мегаграмм.

При соблюдении единого правила образования кратных и дольных единиц переход от них к единицам системы очень прост: приставка заменяется числом 10 в соответствующей степени.

В таблице 2, приведены приставки для образования дольных и кратных единиц.

Таблица 2

Приставка	Значение	Сокращенное обозначение		Приставка	Значение	Сокращенное обозначение	
		русск. буквами	латинск. или греч. буквами			русск. буквами	латинск. или греч. буквами
атто	10^{-18}	*а*	a	деци	10^{-1}	*д*	d
фемто	10^{-15}	*ф*	f	дека	10	*да*	da
пико	10^{-12}	*п*	p	гекто	10^{2}	*г*	h
нано	10^{-9}	*н*	n	кило	10^{3}	*к*	k
микро	10^{-6}	*мк*	μ	мега	10^{6}	*М*	M
милли	10^{-3}	*м*	m	гига	10^{9}	*Г*	G
санти	10^{-2}	*с*	c	тера	10^{12}	*Т*	T

Физическая величина и ее размерность - это не одно и тоже. Одинаковую размерность могут иметь совершенно разные по своей природе физические величины, например работа и вращающий момент. Размерность не содержит информации о том, является ли данная физическая величина скаляром, вектором или тензором. Однако, величина размерности важна для проверки правильности соотношений между физическими величинами.

При подстановке числовых значений в расчетные формулы все величины должны быть выражены в основных или производных единицах одной и той же системы, что очень важно, так как только при этом условии в формулах не появятся коэффициенты, зависящие от выбора единиц.

Виды измерений

Измерения могут быть ***прямыми***, при которых значения физической величины находят непосредственным отсчетом по шкале измерительного прибора (измерение длины линейкой, температуры термометром) и ***косвенными*** при которых значение физической величины находят на основании известной зависимости между этой величиной и величинами, измеряемыми непосредственно (определение плотности тела по отношению массы к объему, определение сопротивления проводника по отношению разности потенциалов к току и т. д.).

В зависимости от числа проведенных измерений различают ***однократные*** и ***многократные*** измерения.

Многократные измерения могут быть ***равноточными*** и ***неравноточными***. **Равноточными называют измерения, выполненные с одинаковой точностью** (например, одним и тем же прибором, при одинаковых условиях).

В физике и технике не существует абсолютно точных измерительных приборов, следовательно, нет и абсолютно точных результатов измерения. Поэтому, числовые значения всех физических величин являются *приближенными*, то есть, измеряются с погрешностями и, поэтому любые измерения необходимо повторить два - три раза!

Измерения могут быть прямыми и косвенными, однократными и многократными, равноточными и неравноточными, результаты измерений физических величин всегда являются приближенными числами . Многократные измерения записываются в таблицу с обязательным указанием единиц измерения.

§2. Точность измерения. Приближенные числа

Точность измерения

Точность проведенных измерений не может превышать точность прибора, которым проводилось измерение и характеризуется двумя основными параметрами: абсолютной и относительной погрешностями.

Абсолютная погрешность

Для характеристики каждого конкретного измерения используют его *абсолютную погрешность*, т.е. модуль разности между истинным значением величины и ее значением, полученным в результате измерения:

$$\Delta x = /x_{ист} - x_{изм}/ \qquad [2.1]$$

На практике часто истинное значение неизвестно, поэтому приходится использовать вместо него арифметическое среднее из нескольких измерений, при этом сама *абсолютная погрешность также становится приближенным числом*.

Абсолютная погрешность показывает, насколько неизвестное экспериментатору истинное значение измеряемой величины может отличаться от измеренного значения.

Относительная погрешность

Абсолютная погрешность не в полной мере характеризует результат измерения. Пусть, например, в результате измерений установлено, что длина стола равна L = (100 ±1) см, а толщина его крышки d = (2 ±1) см. Хотя абсолютная погрешность измерений в этих двух случаях одинакова, ясно, что качество измерений в первом случае выше.

Качество измерений характеризуется *относительной погрешностью* ε, равной отношению абсолютной погрешности к значению величины $x_{изм}$, получаемой в результате измерения:

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_{изм}} \qquad [2.2]$$

Относительная погрешность характеризует качество измерения, т.е. насколько верно подобрано соотношение измеряемой величины и абсолютной погрешности измерения.

Приближенные числа

Приближенные значения физических величин будем называть приближенными числами.

Значащими цифрами приближенного числа называются все его цифры, кроме нулей, стоящих левее первой, отличной от нуля цифры.

Примеры.

1. Плотность кислорода 0,00143 г/см^3. В этом числе три значащих цифры.

2. Удельная теплота сгорания бензина 46000 кДж/кг. Если это число задано с точностью до тысяч, то три нуля незначащие (поставлены взамен неизвестных цифр). Такая форма записи приближенных чисел неудобна, т.к. возникает неопределенность при подсчете количества значащих цифр.

3. Удельное сопротивление цинка $6{,}0*10^{-8}$ Ом*м. Здесь последний нуль значащий, в числе две значащие цифры. (Нуль, записанный в конце десятичной дроби, - всегда значащая цифра, иначе этот нуль просто не писали бы.)

Как записывать приближенные числа, чтобы неопределенность при подсчете значащих цифр не возникала, рассказано в нижеследующем подразделе

Запись приближенных чисел.

Приближенные числа принято записывать в стандартной форме:

$$b\times10^n,$$

где b – десятичное число с плавающей запятой, содержащее столько же разрядов, сколько значащих цифр у приближенного числа, n - положительное или отрицательное целое число, называемое порядком числа.

Примеры.

1. Плотность кислорода 0,00143 г/см^3 = 1,43 кг/м^3 (1 кг/м^3 = 10^{-3} г/см^3).

2. Скорость света в вакууме 300000 км/с = $3*10^8$ м/с.

Значащие цифры приближенного числа могут быть *верными* или *неопределенными* (сомнительными).

Если ***абсолютная погрешность*** приближенного числа не превышает единицы последнего разряда, то все значащие цифры приближенного числа называются **верными.**

Пример. Плотность ртути равна 13,5955 г/см^3 . Округлим это значение до сотых: 13,60 г/см^3 = $13{,}60*10^3$ кг/м^3.

Все цифры числа 13,60 верные, так как абсолютная погрешность округления равна 13,60-13,5955=0,0045, что меньше 0,01.

Верными будут все значащие цифры приближенного числа, полученные в результате округления.

В приводимых в условиях задачи на страницах учебников числовых значениях физических величин указываются только верные цифры.

Если абсолютная погрешность приближенного числа превышает единицу последнего разряда, то последняя цифра приближенного числа является неопределенной.

Пример. При измерении объема жидкости мензуркой получен результат: (140$\pm$5) мл. Цифра 0 в числе 140 не является верной, так как абсолютная погрешность больше единицы последнего разряда.

Возведение в степень и извлечение корня.

При возведении в степень приближенного числа или извлечении из него корней следует сохранить в результате столько значащих цифр, сколько имеет верных значащих цифр исходное число.

Примеры.

1) $(3,4*10^2)^3 = 39304000 \approx 3,9*10^7$ (в исходном числе две значащие цифры).

2) $\sqrt{2,354*10^3} = 48,518037 \approx 48,52$ (в исходном числе четыре значащие цифры).

Сложение и вычитание приближенных чисел.

При сложении и вычитании приближенных чисел, в записи которых все цифры верные, оставляют столько десятичных знаков, сколько их имеет число с наименьшим количеством десятичных знаков.

Примеры.

1) $5,14+12,1+6,353 = 23,593 \approx 23,6$

2) $405+0,43 = 405,43 \approx 405$

Умножение и деление приближенных чисел.

При умножении и делении приближенных чисел следует сохранить в результате столько значащих цифр, сколько имеет приближенное число, данное с наименьшим числом верных значащих цифр.

Примеры.

1) $1,5*220 = 1,5*2,2*10^2 \approx 3,3*10^2$.

2) $1,5*35 = 52,5 \approx 52$.

Использование табличных значений

При пользовании таблицами следует иметь в виду, что погрешности приведенных значений равны половине следующего разряда за последней значащей цифрой. Например, если в таблице указано: $р = 2,7*10^3$ кг/м^3, то на самом деле $р = (2,70 \pm 0,05)*10^3$ кг/м^3.

<u>**Не старайтесь выписывать в ответе много цифр, большая часть из которых сомнительна. Какова бы ни была точность калькулятора, он не может превратить неопределенные цифры в верные!**</u>

§3. Виды и источники погрешностей

Погрешности измерений условно можно разделить на три основных вида:

- **Грубые ошибки (промахи)**
- **Систематические погрешности**
- **Случайные погрешности**

Грубые ошибки измерения.

Промах (***грубая ошибка***) - погрешность, существенно превосходящая ожидаемую при заданных условиях.

Промахи возникают из-за недостаточной внимательности и аккуратности, из-за неисправности приборов, неправильной записи результатов измерения и т. п. Почти всегда их можно выявить, повторяя измерения на другой аппаратуре, по другой методике или привлекая к измерению другого наблюдателя.

Результаты измерений, соответствующих грубым ошибкам, нужно отбрасывать и взамен проводить новые измерения. Для исключения промахов любые измерения необходимо повторить не менее 2 раз! Будем считать, что промахи своевременно выявляются и удаляются из результатов измерений.

Систематические погрешности

Систематическая погрешность - погрешность, остающаяся постоянной или закономерно изменяющаяся при повторении измерений.

Общих правил, рецептов для выявления и устранения систематических ошибок нет, но некоторую классификацию можно провести. Выделим две наиболее значимые причины возникновения систематических ошибок при лабораторных измерениях:

a) Несовершенство измерительных приборов – ***инструментальная погрешность***;
b) Неполная разработка методики измерений, неполный учет условий опыта – ***методическая погрешность***;

Инструментальная погрешность прибора

Инструментальные (приборные) погрешности вызываются несовершенством конструкции и неточностью изготовления измерительных приборов (например, небольшое различие в длинах плеч рычажных весов, несовпадение в стрелочном приборе центра шкалы с осью вращения стрелки, изменение хода ручного секундомера при изменении температуры и т.п.) Уменьшение инструментальной погрешности достигается применением более совершенных и точных приборов. Однако полностью устранить приборную погрешность невозможно.

Для характеристики большинства измерительных приборов используют понятие приведенной погрешности (класса точности).

Приведенная погрешность E_n – это отношение абсолютной погрешности к предельному значению x_{max} на шкале прибора:

$$E_n = \frac{\Delta x}{x_{\max}} 100\% \qquad [3.1]$$

По приведенной погрешности приборы подразделяются на семь классов: 0.1; 0.2; 0.5; 1.0; 1.5; 2.5; 4.

Приборы класса точности – 0.1; 0.2; 0.5 применяют для точных лабораторных измерений (прецизионных).

В технике применяют приборы классов – 1.0; 1.5; 2.5; 4 (технические).

Класс точности указывается на шкале прибора.

Из формулы [3.1] следует, что относительная погрешность будет минимальной, если измеряемая величина дает отброс стрелки индикатора на всю шкалу.

Для оптимального использования прибора его предел выбирают так, чтобы значение измеряемой величины попадало в конец шкалы.

В метрологии, кроме формулы [3.1], используется и другие, более сложные определения инструментальной погрешности и связанного с ней класса точности, особенно для приборов с неравномерными шкалами.

Абсолютная погрешность (стандартная погрешность), вычисляемая по классу точности прибора, согласована с так называемой среднеквадратичной ошибкой измерения («стандартное отклонение» см. §3).

Инструментальная погрешность приборов для измерения линейных размеров указана на самом приборе в виде абсолютной погрешности или в виде цены деления. Если на приборе не указан ни класс точности, ни абсолютная погрешность, то она принимается равной половине цены наименьшего деления. Для приборов с цифровым отсчетом измеряемых величин метод вычисления погрешности приводится в паспортных данных прибора. Если эти данные отсутствуют, то в качестве абсолютной погрешности принимается значение, равное половине последнего цифрового разряда индикатора.

Допустим, на приборе указан класс точности «1», это означает, что показания этого прибора верны с точностью до 1% от всей шкалы прибора. Так, если мы имеем вольтметр первого класса точности, у которого вся шкала рассчитана на 100 вольт, то погрешность измерения таким прибором будет $\Delta x_{сист}$ = 1 вольт. И как бы мы не изощрялись, этим вольтметром мы не измерим напряжение с точностью до десятых долей вольта.

Если класс точности прибора не указан, то принято считать инструментальную погрешность равной половине цены деления шкалы прибора. Как правило, цена деления шкалы приборов согласована с инструментальной погрешностью.

Погрешность взвешивания

При точном (прецизионном) взвешивании необходимо учитывать погрешность изготовления гирей, неравноплечность коромысла весов, влияние выталкивающей силы воздуха (Архимедова сила) и другие факторы.

Погрешность взвешивания, при обычных (не прецизионных) измерениях , выбирается равной половине массы наименьшей гири, лежащей на весах (либо выводящей ее из равновесия).

Таким образом, при прямом измерении массы на весах инструментальную погрешность можно принять равной:

$$\Delta_и = \frac{m_{\min}}{2} \qquad [3.2]$$

Например, тело уравновешено на весах при помощи гирь, номинальные (указанные на гирях) значения которых равны 50 г, 20 г, 100 мг и выводятся из равновесия разновесом в 10 мг.

Следовательно, абсолютная погрешность взвешивания:

$$m = 70{,}100 \pm 0{,}005 \text{ г.}$$

Методические погрешности

__Методические погрешности__ вызываются недостатками применяемого метода измерений, несовершенством теории физического явления и неточностью расчетной формулы, используемой для нахождения измеряемой величины. Сюда же можно отнести погрешности связанные с неполным учетом условий опыта. Например, при взвешивании тела на аналитических весах будет допущена систематическая методическая погрешность, если не будет вноситься поправка на различие выталкивающих сил, действующих со стороны воздуха на взвешиваемое тело и разновесы.

Другой пример: часто при получении расчетной формулы для нахождения ускорения груза на машине Атвуда, не учитывают инерцию блока. При этом вносится систематическая погрешность, которая тем меньше, чем меньше масса блока.

Методические погрешности можно уменьшать путем совершенствования метода измерений, а также введения уточнений в расчетную формулу.

Случайные погрешности

__Случайная погрешность__ - погрешность, изменяющаяся случайным образом при повторении равноточных измерений.

Часто при проведении повторных измерений какой-либо величины получаются несколько различные результаты, отличающиеся друг от друга больше, чем сумма погрешностей прибора и отсчета. Это вызвано действием случайных факторов, которые невозможно устранить в процессе эксперимента или природой явления (например, регистрация космических частиц счетчиком излучения).

Пусть мы определяем дальность полета шарика, пущенного из баллистического пистолета в горизонтальном направлении.

Даже при неизменных условиях эксперимента шарик не будет попадать в одну и ту же точку поверхности стола. (Это связано с тем, что шарик имеет не совсем правильную форму, на боек ударного механизма при движении в канале пистолета действует сила трения, изменяющаяся по величине, положение пистолета в пространстве не совсем жестко зафиксировано и т.д.)

Такой разброс результатов происходит практически всегда при выполнении серии экспериментов

Причины возникновения случайных погрешностей кроются в несовершенстве наших органов чувств и во многих других обстоятельствах, сопровождающих измерения, которые нельзя учесть заранее.

Для уменьшения случайных погрешностей увеличивают количество опытов и в качестве результата используют среднее значение. При этом происходит частичная компенсация случайных отклонений результатов измерений в сторону завышения и в сторону занижения.

Расчет случайных погрешностей производится методами теории вероятностей и математической статистики и определяется выбором вида функции распределения случайных величин. Для всех функций распределения, базовым является распределение Гаусса, справедливое для большого количества *__равноточных__* измерений.

Распределение Гаусса

Пусть произведено большое количество равноточных измерений величины x, и получен ряд чисел $x_2, x_2, \ldots, x_n$. Разобьем числовую ось на равные интервалы Δx_k и построим ступенчатую кривую (гистограмму), так, чтобы высота каждой ступеньки $f(x)$ была пропорциональна n_k – числу попаданий результатов измерений в данный интервал значений Δx_k Назовем отношение n_k (число попаданий результатов измерений в данный интервал Δx_k) к полному числу опытов n **вероятностью** $P(\Delta x_k)$ получения результата в заданном интервале значений Δx_k ($x_k \le x \le x_{k+1}$):

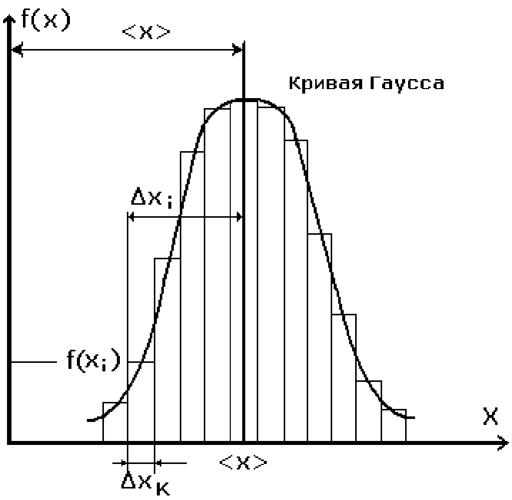
$$P(\Delta x_k) \approx \frac{n_k}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n_k}{n} \qquad [3.3]$$

Отношение $P(\Delta x_k)$ к величине интервала Δx_k будем называть **плотностью вероятности** ***f (x)*** данного значения x (при $\Delta x_k \to 0$):

$$f(x) \approx \frac{P(\Delta x_k)}{\Delta x_k} = \lim_{\Delta x_k \to 0} \frac{P(\Delta x_k)}{\Delta x_k} \qquad [3.4]$$

При большом числе измерений ($n \to \infty$) ближе всего к истинному значению $x_{ист}$ будет координата $<x>$ - центра тяжести гистограммы. Эта величина называется средним арифметическим или просто средним и определяется по формуле:

$$x_{ист} \approx <x> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad [3.5]$$



Гистограмма результатов измерений

При $n \to \infty$ и $\Delta x_k \to 0$ гистограмма переходит в плавную кривую, называемую **законом нормального распределения вероятностей** для случайных величин – **распределение Гаусса** (плавная кривая на рисунке).

$$f(\Delta x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\Delta x_i^{\,2}}{2\sigma^2}\right) \qquad [3.6]$$

где величина σ называется **среднеквадратичным или стандартным отклонением** x_i от среднего значения $<x>$ а, σ^2 **дисперсией распределения.**

$$\sigma = \lim_{x\to\infty} \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i - <x>\right)^2}{n-1}} \qquad [3.7]$$

Максимум кривой распределения называется *математическим ожиданием* и соответствует *истинному* значению измеряемой величины $x_{ист}$, которое можно получить, произведя усреднение x по функции плотности распределения *f(x)dx*:

$$x_{ист} = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \,. \qquad [3.8]$$

При большом числе измерений ($n \to \infty$) среднее значение $<x>$, вычисленное по формуле [3.5], будет стремиться к величине математического ожидания.

По определению функции плотности распределения, она должна удовлетворять условию нормировки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(\Delta x)dx = 1 \qquad [3.9]$$

Это аналогично очевидному требованию, чтобы вероятность попадания произвольно выбранного значения *x* в диапазон от $-\infty$ до $+\infty$ была равна 1.

Вероятность того, что отклонение измеренных значений x_i от среднего значения $<x>$ не превышает абсолютного значения Δx, равна:

$$p(\Delta x) = \int_{-\Delta x}^{+\Delta x} f(\Delta x)dx = \int_{x-\Delta x}^{x+\Delta x} f(x)dx \qquad [3.10]$$

Распределение Гаусса показывает, что вероятность появления малых случайных погрешностей больше вероятности появления больших погрешностей, при этом случайные погрешности равные по абсолютной величине, но противоположные по знаку встречаются одинаково часто. Характер кривой определяется величиной дисперсии σ^2: чем меньше дисперсия, тем меньше разброс значений *x* (меньше вероятность появления больших погрешностей).

Значение вероятности появления погрешности в пределах кратных стандартному отклонению σ (значения интеграла [3.10] с пределами интегрирования $\pm\sigma$, $\pm 2\sigma$, $\pm 3\sigma$):

$$p(\sigma) = 0.68;\ p(2\sigma) = 0.95;\ p(3\sigma) = 0.999 \qquad [3.11]$$

Интервал $(<x> - \Delta x;\ <x> + \Delta x)$ в который попадает истинное значение искомой величины с заданной доверительной вероятностью, называют **доверительным интервалом.**

<u>Доверительной вероятностью (надежностью) *P(Δx)* (формула [3.10]) серии измерений называется вероятность попадания истинного значения измеряемой величины в данный интервал (выражается в долях единицы или в процентах).</u>

Чем больше доверительный интервал, тем больше доверительная вероятность того, что результат измерения попадет в него.

Распределение Стьюдента

В учебных лабораторных экспериментах число измерений ограничено ($n \le 10$), при этом распределение Гаусса для случайных погрешностей выполняется приближенно.

В 1908 году английским математиком Госсетом (псевдоним - Стьюдент) был предложен другой закон распределения случайных погрешностей измерений – **распределение Стьюдента** (используется при $n < 20$). При $n > 20$ распределение Стьюдента очень мало отличается от распределения Гаусса.

Распределение Стьюдента позволяет по заданной величине доверительной вероятности (надежности) $P(\Delta x)$ найти границы доверительного интервала Δx, с помощью поправочных коэффициентов Стьюдента:

$$\Delta x = t_{p,n} S \qquad [3.12]$$

где $t_{p,n}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора доверительной вероятности p и числа измерений n, S – среднеквадратичное отклонение – (СКО), вычисляемое по формуле:

$$S=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-<x>\right)^2}{n(n-1)}} \qquad [3.13]$$

Величина интервала Δx, рассчитанная при помощи формулы [3.12] стремится к нулю при увеличении числа опытов в серии. Это не значит, однако, что можно проводить абсолютно точные измерения ведь приборы, с помощью которых мы получили результаты, также имеют погрешности (инструментальная погрешность). Поэтому погрешность среднего при бесконечном увеличении числа опытов стремится к погрешности прибора, при этом:

$$\lim_{n\to\infty} S\cdot\sqrt{n}\to\sigma \qquad [3.14]$$

Таким образом, при $n\to\infty$ распределение Стьюдента переходит в распределение Гаусса. Поэтому *абсолютная погрешность измерительного прибора, как правило, согласовывается со стандартным отклонением* σ (формула [3.7]) , что соответствует доверительной вероятности $p = 0{,}68$ (формула [3.11]).

Очевидно, что число опытов имеет смысл выбрать таким, чтобы случайная погрешность среднего сравнялась с погрешностью прибора либо стала меньше ее. Дальнейшее увеличение числа измерений теряет смысл, так как не увеличит точность получаемого результата.

В таблице 3 приведены часто используемые значения коэффициентов Стьюдента.

Таблица 3. Коэффициенты Стьюдента $t_{p,n}$

Число измерений n	Доверительная вероятность (надежность), p			
	0,90	0,95	0,99	0,999
2	6,314	12,706	63,657	636,619
3	2,920	4,303	9,925	31,598
4	2,353	3,182	5,841	12,941
5	2,132	2,776	4,604	8,610
6	2,015	2,571	4,032	6,859
7	1,943	2,447	3,707	5,959
8	1,895	2,365	3,499	5,405
9	1,860	2,306	3,355	5,041
10	1,833	2,262	3,250	4,781

В учебных физических лабораториях обычно выбирается $0{,}90 \le p \le 0{,}99$

Приближенная формула для совместного учета инструментальной и случайной погрешностей:

$$\Delta x \cong \sqrt{\Delta x_{си}^2+\Delta x_{сл}^2}\,, \qquad [3.15]$$

Полная погрешность Δx во всех случаях складывается из систематической (инструментальной) $\Delta x_{си}$ и $\Delta x_{сл}$ случайной погрешностей. Если эти погрешности соизмеримы между собой, то они складываются по формуле [3.15]. Если одна из них значительно больше другой, учитывают большую из них.

§4. Расчет погрешностей измерений

Погрешности прямых измерений

Прямые измерения – измерения, производимые непосредственно по показаниям измерительных приборов. Точность измерения физических величин определяется в первую очередь точностью прибора, выбранного для измерений. Выбор прибора является очень важным этапом подготовки к измерениям.

Прежде, чем приступить к измерениям, необходимо предварительно определить пределы точности данных приборов и инструментов (инструментальные погрешности).

Последовательность расчета

Равноточные измерения любой физической величины делаются не менее трех раз и заносятся в таблицу, с учетом инструментальной погрешности.

Записывают величину инструментальной погрешности Δ_u.

В зависимости от поведения значений результатов измерения, возникают две различные схемы:

Случайная погрешность много меньше инструментальной

Если оказывается, что все время получается один и тот же результат (нет разброса), то в качестве погрешности берется стандартная погрешность прибора, рассчитанная по его классу точности (или погрешность градуировки прибора) Δ_u (*инструментальная погрешность*) и результат записывается в виде:

$$x = <x> \pm \Delta_u$$

При этом доверительная вероятность (надежность) равна $p(\sigma) = 0.68$ и, как правило, не указывается. Если необходимо указать интервал с большей надежностью, то можно воспользоваться интегралом [3.10] для вычисления интервала с заданной надежностью или использовать известные значения [3.11].

Совокупная погрешность

Если разброс значений физической величины x превышает погрешность градуировки, то количество измерений n увеличивают до тех пор, пока они не окажутся величинами одного порядка.

Совокупную погрешность (случайную плюс систематическую) вычисляют в следующей последовательности:

1. Находят среднее значение:

$$<x> = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad [4.1]$$

2. Оценивают среднеквадратичное отклонение - СКО:

$$S = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(x_i - <x>)} \qquad [4.2]$$

3. По заданному значению доверительной вероятности p и числу измерений n, находят случайную абсолютную погрешность:

$$\Delta x_{сл} = t_{n,p} \cdot S \qquad [4.3]$$

4. Полученное значение $\Delta x_{сл}$ сравнивается с инструментальной погрешностью $\Delta x_{и}$ и, если они различаются на порядок и более, то берется наибольшее из них. Если они сравнимы по величине, то полную погрешность Δx вычисляют как корень квадратный из суммы квадратов этих погрешностей.

$$\Delta x = \sqrt{\left(\Delta x_{и}\right)^2 + \left(\Delta x_{сл}\right)^2} \qquad [4.4]$$

5. Находят относительную погрешность:

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta x}{< x >} \qquad [4.5]$$

6. Результат записывают в виде:

$$x = < x > \pm \Delta x \ , \ \ \varepsilon_x = \ldots, p = \ldots \qquad [4.6]$$

Пример расчета погрешности прямого измерения

Измерялся микрометром диаметр d стержня (систематическая погрешность измерения равна $\Delta_{си}$ = 0.005 *мм*).

Результаты измерений заносим во вторую графу таблицы и находим <*d*>*:*

$$< d > = \frac{\sum d_i}{n} = \frac{24.06}{6} = 4.01 мм$$

В третью графу этой таблицы записываем разности $\left(d - < d >\right)$, а в четвертую $\left(d - < d >\right)^2$ – их квадраты *(таблица 4)* и вычисляем СКО:

$$S_d = \sqrt{\frac{\sum \left(d - < d >\right)^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{0.0046}{5 \cdot 6}} = 0.01238 мм$$

Таблица 4

n	d, *мм*	$\left(d - < d >\right)$	$\left(d - < d >\right)^2$
1	4.02	+ 0.01	0.0001
2	3.98	- 0.03	0.0009
3	3.97	- 0.04	0.0016
4	4.01	+ 0 .00	0.0000
5	4.05	+ 0.04	0.0016
6	4.03	+ 0.02	0.0004
Σ	24.06	–	0.0046

Задавшись надежностью p = 0.95, по таблице коэффициентов Стьюдента для шести измерений найдем $t_{n,p}$ = 2.57. Случайная погрешность найдется по формуле [4.3].

$$\Delta d = 0.01238 \cdot 2.57 = 0.04\,мм.$$

Сравним случайную и систематическую погрешности:

$$\frac{\Delta d}{\Delta_{си}} = \frac{0.04}{0.005} = 8,$$

следовательно, $\Delta_{си}$ = 0.005 *мм* можно отбросить.

Найдем относительную погрешность:

$$\varepsilon = \frac{\Delta d}{< d >} \cdot 100\% = \frac{0.04}{4.01} \approx 1\%$$

Окончательный результат запишем в виде

$$d = (4.01 \pm 0.04)\ мм \text{ при } p = 0.95. \quad \varepsilon \approx 1\%$$

Погрешности косвенных измерений

В большинстве случаев измерения являются косвенными, когда результат определяется на основе расчетов. Так, например, определяется электрическое сопротивление $R = \frac{U}{I}$, импульс тела $P = mv$, скорость при равноускоренном движении тела $v = v_0 + at$, плотность тела $\rho = \frac{m}{V}$ и т.п.

При расчете погрешности необходимо учитывать, как выглядит формула, по которой производился расчет искомой физической величины. Погрешность при косвенных измерениях рассчитывается иначе, чем при прямых измерениях.

Если искомая величина y определяется в результате косвенных измерений и является функцией нескольких переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, то в качестве результата измерения используют значение, получающееся при подстановке в формулу расчета, средних значений аргументов, полученных при обработке их прямых измерений.

$$< y >= f(< x_1 >, < x_2 >, < x_3 >, \ldots, < x_k >) \qquad [4.7]$$

Абсолютная погрешность Δy косвенного результата измерения находится по формуле:

$$\Delta y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot \Delta x_i \right)^2} \qquad [4.8]$$

где $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ - частная производная функции $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ по x_i, а Δx_i – абсолютная погрешность непосредственного измерения величины x_i

Относительная погрешность ε_y может быть вычислена в общем случае по формуле:

$$\varepsilon_y = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\right)^2 \Delta x_i^2} \qquad [4.9]$$

Формулы упрощенного расчета относительных погрешностей для некоторых, часто встречающихся случаев приведены в таблице 5.

Таблица 5

Номер	Вид функции	Относительная погрешность
1	$x = A + B$	$\varepsilon_x = \frac{\Delta A + \Delta B}{A + B}$
2	$x = AB$; $x = \frac{A}{B}$	$\varepsilon_x = \varepsilon_A + \varepsilon_B = \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta B}{B}$
4	$x = A^n$	$\varepsilon_x = n\varepsilon_A = \frac{n\Delta A}{A}$
5	$x = \sqrt[n]{A}$	$\varepsilon_x = \frac{1}{n}\varepsilon_A = \frac{\Delta A}{nA}$
6	$x = \frac{1}{A} \pm \frac{1}{B}$	$\varepsilon_x = \frac{\Delta A / A^2 + \Delta B / B^2}{1/A + 1/B}$
7	$x = \sin A$	$\varepsilon_x = \Delta A \cdot ctgA$
8	$x = \cos A$	$\varepsilon_x = \Delta A \cdot tgA$
9	$x = tgA$	$\varepsilon_x = \frac{2\Delta A}{\sin 2A}$

Последовательность упрощенного расчета

1. Повторяют пункты 1 – 6 предыдущего параграфа для всех физических величин x_1, x_2, x_3, ….., x_k, входящих в рабочую формулу.
2. Среднее значение $<y>$ косвенного измерения вычисляют, подставив в рабочую формулу средние значения $<x_i>$ всех прямых измерений:

$$< y >= f(< x_1 >, < x_2 >, < x_3 >, ..., < x_k >) \qquad [4.10]$$

3. Относительная погрешность ε_y может быть вычислена по формуле (где - Δx_i – абсолютная погрешность прямого измерения величины x_i,):

$$\varepsilon_y \approx \sum\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\ln f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)\Delta x_i\right) \qquad [4.11]$$

или с помощью таблицы 3.

4. Абсолютная погрешность Δy косвенного результата измерения можно вычислить по среднему значению <y> и величине общей относительной погрешности ε_y, найденной на предыдущем шаге:

$$\Delta y = \langle y \rangle \varepsilon_y \qquad [4.12]$$

5. Результат записывают в виде:

$$y = \langle y \rangle \pm \Delta y \;, \;\; \varepsilon_y = \ldots, \;\; p = \ldots \qquad [4.13]$$

Примечание. Если при вычислении погрешностей прямых измерений задавалось одно и то же значение доверительной вероятности p , то для результата косвенного измерения указывается та же доверительная вероятность, в противном случае, наименьшее из них.

Пример расчета погрешности косвенного измерения

Пусть результат измерения плотности ρ цилиндра находится из формулы:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{\frac{\pi}{4} d^2 h} = \frac{4 \cdot m}{\pi \cdot d^2 h} \qquad [4.14]$$

где m – масса цилиндра, d – диаметр цилиндра, а h – его высота.

При прямых измерениях величин m, d и h получены следующие результаты:

m = (60, 01 ± 0,01) г, $\varepsilon_m \approx 0{,}00017$, $p = 0.95$

d = (25, 010 ± 0,005) мм, $\varepsilon_d \approx 0{,}00020$, $p = 0.95$

h = (30, 000 ± 0,005) мм; $\varepsilon_h \approx 0{,}00017$, $p = 0.95$

Вычислим среднее значение плотности цилиндра по измеренным средним значениям массы, диаметра и высоты:

$$\rho = \frac{4 \cdot 60{,}01}{\pi \cdot (25{,}01)^2 30} \approx 0{,}0040738 \approx 4073{,}8(\text{кг}/\text{м}^3)$$

Для нахождения погрешности определения плотности цилиндра, прологарифмируем формулу [4.14]:

$$\ln \rho = \ln \frac{\pi}{4} + \ln m + 2 \ln d + \ln h$$

и возьмем дифференциал. Заменив дифференциалы приращениями, получим:

$$\frac{\Delta \rho}{\rho} = \frac{\Delta m}{m} + 2\frac{\Delta d}{d} + \frac{\Delta h}{h} \quad \text{или} \quad \varepsilon_\rho \approx \varepsilon_m + 2\varepsilon_d + \varepsilon_h$$

Теперь можно определить абсолютную погрешность $\Delta\rho$ при определении плотности цилиндра, подставить числовые величины и записать окончательный результат:

$$\Delta\rho = \varepsilon_\rho \rho = (\varepsilon_m + 2\varepsilon_d + \varepsilon_h)\rho = 2{,}8 \approx 3(\text{кг}/\text{м}^3)$$

$$\rho_{рез} = (4074 \pm 3)\,\text{кг}/\text{м}^3 \;, \text{ при } p = 0{,}95, \;\; \varepsilon_\rho = 0{,}001$$

Форма записи результата

Запись результата

Обработка результатов измерений в лабораториях проводятся на калькуляторах и ПК, и просто удивительно, как магически действует на многих студентов длинных ряд цифр после запятой. «Так точнее» – считают они. Однако легко видеть, например, что запись $a = 2.8674523 \pm 0.076$ бессмысленна. При ошибке 0.076 последние пять цифр числа не означает ровно ничего.

Если мы допускаем ошибку в сотых долях, то тысячным, тем более десятитысячным долям веры нет. Грамотная запись результата была бы 2.87 ± 0.08. Всегда нужно производить необходимые округления, чтобы не было ложного впечатления о большей, чем это есть на самом деле, точности результатов.

Округление результатов

Округление результатов измерений следует начинать с округления погрешности. В окончательном виде в погрешности принято оставлять одну или две значащие цифры (остальные округляются). Две значащие цифры в погрешности приводят только при особо точных измерениях, а также, если старшая цифра ≤ 3. Если старшая цифра > 3, то в погрешности оставляют только одну (старшую) цифру, округляя остальные

Результаты измерения округляют с точностью «до погрешности», т.е. последняя значащая цифра в результате должна находиться в том же разряде, что и в погрешности.

Примеры*:*

$243.8714 \pm 0.026 \approx 243.871 \pm 0.026$;

$243.871 \pm 2.63 \approx 243.9 \pm 2.6$;

$1053 \pm 47 \approx (10.5 \pm 0.5)\times 10^2$.

Округление результата измерения достигается простым отбрасыванием цифр, если первая из отбрасываемых цифр меньше 5.

Примеры*:*

8.337 (округлить до десятых) ≈ 8.3;

833.438 (округлить до целых) ≈ 833;

0.27375 (округлить до сотых) ≈ 0.27.

Если первая из отбрасываемых цифр больше или равна 5, то последняя из остающихся цифр увеличивается на единицу.

Примеры*:*

8.3351 (округлить до сотых) ≈ 8.34;

0.2510 (округлить до десятых) ≈ 0.3;

271.515 (округлить до целых) ≈ 272.

Если отбрасываемая цифра равна 5 , а за ней нет значащих цифр (или стоят одни нули), то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу, когда она нечетная, и оставляют неизменной, когда она четная.

Примеры*:*

0.875 (округлить до сотых) ≈ 0.88;
0.5450 (округлить до сотых) ≈ 0.54;
275.500 (округлить до целых) ≈ 276;

Итак, перед записью результата измерений x необходимо правильно провести округление сначала абсолютной погрешности, а затем и измеренного (среднего) значения. При записи результата обязательно указывают относительную погрешность и доверительную вероятность p, с которой вычислялся доверительный интервал Δx .

$$x=\langle x\rangle \pm \Delta x, \quad \varepsilon=\Delta x/\langle x\rangle, \quad p=\ldots$$

§5. Построение графиков.

При изучении зависимости одной измеряемой величины от другой целесообразно представить результаты в форме графика. Главное достоинство графика – его наглядность. Он позволяет получить общее качественное представление о характере зависимости, а также судить о соответствии экспериментальных данных той или иной теоретической зависимости. (на графиках легко видеть «выпадающие» точки - промахи). График не заменяет таблицы эксперимента, но дополняет его.

При измерениях физических величин иногда удобно проводить измерения графическим методом, определяя из графиков некоторые их параметры. Для линейных зависимостей обычно из графика определяют тангенс угла наклона.

Масштаб

Графики следует строить на листах миллиметровой бумаги. Масштаб графика по обеим осям нужно выбирать так, чтобы предполагаемые зависимости обладали наибольшей наглядностью и заполняли большую часть поля. Как правило, при использовании равномерных шкал, сетка графика должна быть квадратной. Рекомендуется использовать масштабы 1:1; 1:10; и т. д., 1:2; 1:20; и т. д., 1:5; 1:50 и т. д. Эти масштабы наиболее удобны для пересчета измеряемых величин в единицы длины, откладываемые по осям.

Оформление

Стрелки на концах осей графика, как правило, не ставят, но обязательно указывают обозначения физических величин, и единицы их измерения. Если значения физической величины содержат множители 10^n , то их относят к единице измерения. Учитывая, что миллиметровая бумага имеет очень мелкую сетку, на график следует нанести только крупную сетку. Надписывают лишь деления крупной сетки. Каждый график снабжают пояснительной подписью.

Для нанесения опытных точек используют условные обозначения: светлые и темные кружки, квадратики, треугольники, крестики и т. п. Смысл обозначений должен быть приведен в пояснительной подписи. Кривые, принадлежащие одному семейству, нумеруются по порядку, а нумерация разъясняется в подписи. Иногда рядом с кривыми выписывают значения соответствующих параметров. Для того чтобы различить кривые, принадлежащие разным семействам, используют сплошные, штриховые, пунктирные и т.п. линии.

Погрешность проведения линий

При построении графиков следует иметь в виду, что по результатам опытов мы получаем не точку, а прямоугольник со сторонами $2\Delta x$ и $2\Delta y$. Поэтому при построении графиков необходимо проводить ***плавную*** линию так, чтобы примерно одинаковое число точек, оказалось, по разные стороны от кривой.

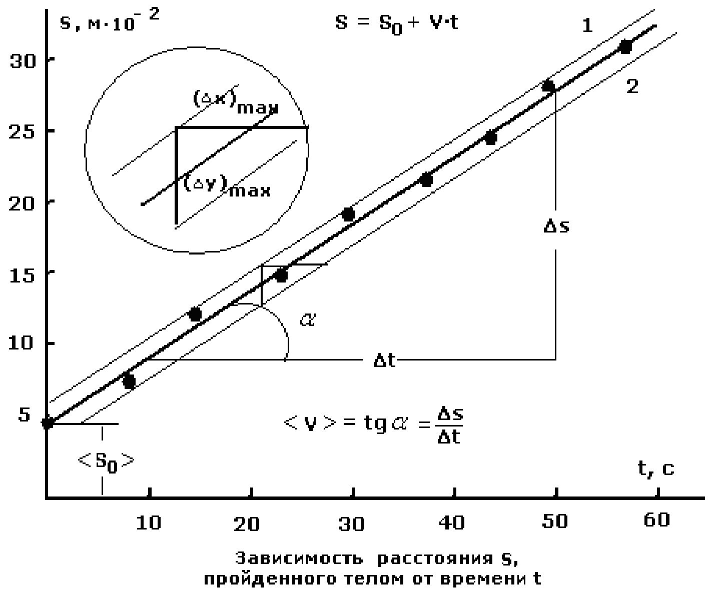


Рис. 7. Пример графической обработки результатов

<u>Определение тангенса угла наклона проведенной линии и координаты ее пересечения с осью Y:</u>

1. Проводим плавную прямую по точкам, как указано выше.
2. На графике (рис. 7) выделяем прямоугольный треугольник со сторонами: Δs и Δt, гипотенузой которого является часть проведенной прямой или параллельной ей линии.
3. Находим тангенс угла наклона прямой $tg\alpha = \Delta s / \Delta t = < V >$
4. Находим координату точки пересечения проведенной прямой с вертикальной осью ординат $< S_0 >$.

<u>Погрешность, проведенной таким образом плавной линии, можно грубо оценить следующим образом</u>:

1. Провести две линии, параллельно построенной – одну над ней (1) и другую под ней (2), так, чтобы они прошли по крайним экспериментальным точкам
2. Найти по графику наибольшие значения расстояний между ними $(\Delta x)_{max}$ и $(\Delta y)_{max}$, перемещая линейку параллельно горизонтальной и вертикальной осям, соответственно
3. Среднеквадратичные отклонения (СКО) для ординаты y и абсциссы x принять равными: $S_y = (\Delta y)_{\max} / 2\sqrt{n}$ и $S_x = (\Delta x)_{\max} / 2\sqrt{n}$, соответственно, где n – число точек.
4. Задав значение надежности p и, зная число точек на графике n, находим значение коэффициента Стьюдента $t_{p,n}$ и рассчитываем интервалы надежности для найденных

значений координаты точки пересечения с осью y: $\Delta S_0 = t_{p,n} S_y$ и тангенса угла наклона проведенной линии: $\Delta V = t_{p,n}(S_y + S_x)$.

Записываем результат в виде: $S_0 =< S_0 > \pm \Delta S_0$ и $V =< V > \pm \Delta V$; $p =$;

Такая оценка погрешности может применяться, если ожидаемая зависимость *y(x)* близка к линейной, но плохо применима, если ожидаемая зависимость степенная или экспоненциальная.

Если зависимость *y(x)* нелинейная, то необходимо предварительно подобрать ***функциональный масштаб***, исходя из ожидаемого вида зависимости *y(x)* .

Функциональный масштаб.

Если зависимость *y(x)* нелинейная, то в ряде случаев ее можно свести к линейной путем замены переменных. Так, если по расположению экспериментальных точек на графике *y(x)* ожидается зависимость вида

$$y = ae^{-b/x}, \qquad [5.1]$$

то, прологарифмировав это уравнение, можно перейти к таким переменным W и V, что связь между ними окажется линейной:

$$\ln y = \ln a - b/x \quad \text{или} \quad W = M + kV \qquad [5.2]$$

где мы произвели замену переменных: $W = \ln y; 1/x = V; -b = k$.

Теперь на графике зависимость *W(V)* должна быть представлена прямой линией.

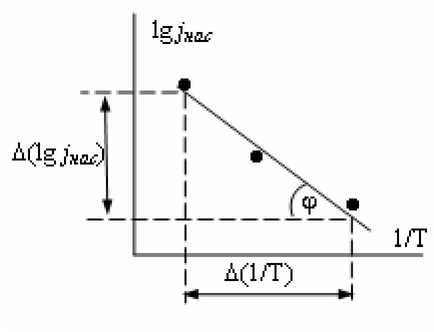
Рассмотрим конкретный пример явления термоэлектронной эмиссии. Из вольт - амперной характеристики вакуумного диода измеряют зависимость плотности тока насыщения $j_{нас}$ от температуры T. Эта зависимость описывается законом Ричардсона – Дэшмана

$$j_{нас} \sim \sqrt{T} e^{\frac{-A}{kT}}$$

где A – работа выхода электронов из металла, которую необходимо определить из измерений, k – постоянная Больцмана.

Если эту зависимость прологарифмировать, то приближенно ее можно записать

$$\lg j_{нас} = const - A/kT$$



Экспериментальные данные (черные точки) удобно нанести на график в координатах *lg(*$j_{нас}$*)* в зависимости от *(1/T)*.

Работа выхода выражается через тангенс угла наклона φ:

$$A = \frac{k \cdot tg\varphi}{0,43}$$

где тангенс угла определяется непосредственно из графика, как

$$tg\varphi = \frac{\Delta(\lg j_{нас})}{\Delta(1/T)}$$

Аналогично можно определить тангенс угла наклона экспериментальных зависимостей и в других подобных случаях, однако наилучшие результаты получаются при применении метода наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов

Пусть величина y зависит от x и в результате эксперимента получено достаточно много пар значений *(x, y)*. Пусть известно также, что зависимость *y(x)* должна быть линейной функцией:

$$y = m + kx \qquad [5.3]$$

Однако в связи с погрешностями измерений полученные точки *(x, y)* не ложатся на одну прямую линию. Как найти наиболее вероятный ход искомой прямой?

Прямая линия [16], в методе наименьших квадратов, считается проведенной по экспериментальным точкам наилучшим образом, если выражение:

$$f(m,k) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (m + kx_i)\right]^2 \qquad [5.4]$$

минимально. Условия минимума функции $f(m,k)$:

$$\frac{\partial f}{\partial m} = 0; \frac{\partial f}{\partial k} = 0 \qquad [5.5]$$

Используя эти условия, можно найти формулы для расчета коэффициентов m и k:

$$m = \langle y \rangle - k \langle x \rangle \quad \text{и} \quad k = \frac{\langle xy \rangle - \langle x \rangle \langle y \rangle}{D(x)}, \qquad [5.6]$$

где введены обозначения для средних значений:

$$\langle x \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \langle y \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i \quad \langle xy \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \quad \langle x^2 \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad \langle y^2 \rangle = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

и дисперсий распределений экспериментальных точек по x и y:

$$D(x) = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 \quad D(y) = \langle y^2 \rangle - \langle y \rangle^2 \qquad [5.7]$$

n – число измерений, т.е. число пар (x_i, y_i).

Для определения стандартных отклонений (СКО) коэффициентов m и k используются формулы:

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{D(y)}{D(x)} - k^2} \quad S_m = S_k\sqrt{D(x)} \qquad [5.8]$$

Важно! Если известно, что искомая прямая точно проходит через начало координат:

$$y = kx \qquad [5.9]$$

то, коэффициент наклона для наилучшей прямой - k в [5.9], рассчитывается по формуле:

$$k = \frac{< xy >}{< x^2 >} \qquad [5.10]$$

А стандартное отклонение (СКО) коэффициента k по формуле:

$$S_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{\frac{< y^2 >}{< x^2 >} - k^2} \qquad [5.11]$$

Доверительные интервалы для этих коэффициентов во всех случаях вычисляются обычным способом:

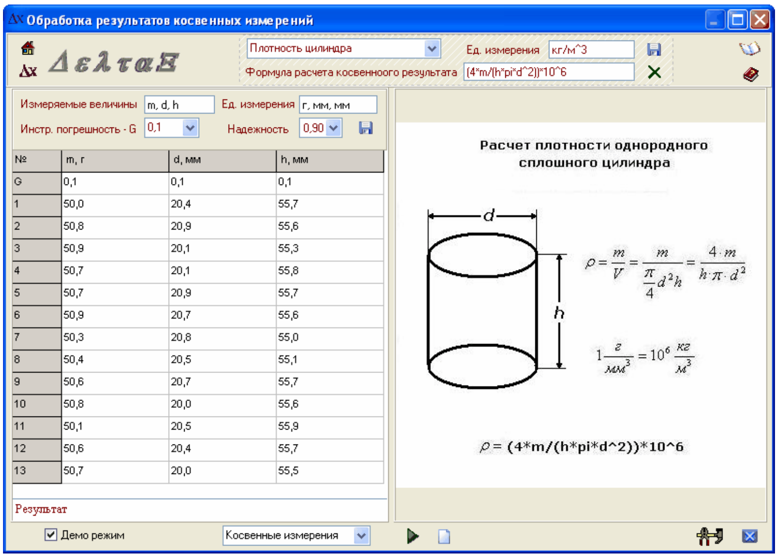
$$\Delta k = t_{p,n} S_k \quad \Delta m = t_{p,n} S_m \qquad [5.12]$$

где $t_{p,n}$ - коэффициент Стьюдента, зависящий от выбора надежности (доверительной вероятности) p и числа измерений n.

§6. Компьютерная обработка результатов измерений

Обработка результатов многократных измерений очень трудоемкий процесс, поэтому удобно для этого использовать компьютерные программы для расчета.

Одним из авторов данного пособия (Абдульмановым Р. Р.) создана программа для обучения способам обработки результатов измерений (Демо режим) и их полной обработки (Рабочий режим) – DeltaX.

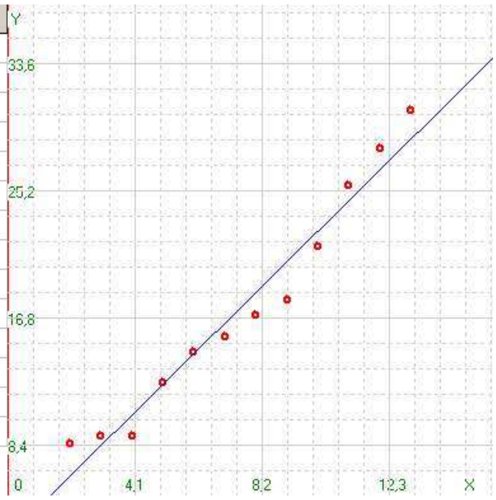


Данная программа позволяет рассчитывать результаты прямых и косвенных измерений, а также, строить графики предполагаемых прямолинейных зависимостей по экспериментальным точкам и определять их параметры методом наименьших квадратов.

Приведем пример графической обработки данных методом наименьших квадратов при помощи программы DeltaX.

№	x, rad	y,
1	0	3,5
2	1	3,5
3	2	8,5
4	3	9,0
5	4	9,0
6	5	12,5
7	6	14,5
8	7	15,5
9	8	17,0
10	9	18,0
11	10	21,5
12	11	25,5
13	12	28,0
14	13	30,5

Параметры прямой m: = 2,31 ± 0,65; k: = 2,02 ± 0,16 ; p = 0,90



С программой можно ознакомиться по адресу: http://rafsoft.narod.ru/DeltaX.html

Оформление лабораторной работы

Лабораторные работы оформляются на двойном тетрадном листе из четырех страниц.

<u>Содержание отдельных страниц отчета</u>:

1. Первая страница – титульная. Должна включать: название учебного заведения, название кафедры, лабораторный номер и полное название лабораторной работы, кто выполнял (Ф. И. О. студента, номер группы), дата выполнения.
2. Вторая страница – описание работы. Включает: цель работы, перечень оборудования и принадлежностей, рисунки, основные и расчетные формулы.
3. Третья страница – результаты работы. Многократные измерения всех физических величин должны быть представлены в виде таблицы. Все необходимые вспомогательные вычисления выполняются на черновиках и не входят в отчет. Итоговый результат должен быть представлен в виде отдельной строки под таблицей измерений, с указанием доверительного интервала, надежности и относительной погрешности. Графики строятся на отдельных листах и вкладываются в отчет.
4. Четвертая страница – выводы и обсуждение результатов. Необходимо подготовить устные или письменные ответы по всем контрольным вопросам, к данной лабораторной работе.

Вопросы для самопроверки

Физическая величина

1. Что называется физической величиной?
2. Что значит измерить физическую величину?
3. Как определяется система единиц измерения?
4. Основные и дополнительные единицы СИ.
5. Как образуются производные единицы СИ?
6. Как образуются дольные и кратные единицы?
7. Почему важно при вычислениях по формулам выражать все величины в одной и той же системе единиц?
8. Как классифицируют измерения?

Погрешности измерений

9. Какие различают виды погрешностей?
10. Грубые ошибки измерений. Как их выявить?
11. Основные причины возникновения систематических погрешностей.
12. Что называется классом точности прибора? Перечислите семь основных классов точности.
13. Как рассчитывается инструментальная погрешность?
14. Что называется методической погрешностью и как ее уменьшить?
15. Как возникают случайные погрешности, и в каких случаях их необходимо учитывать?
16. Как уменьшить случайную погрешность?
17. Распределение Гаусса. Доверительный интервал и доверительная вероятность (надежность).
18. Распределение Стьюдента. В каких случаях необходимо использовать это распределение?
19. Как использовать таблицу коэффициентов Стьюдента для расчета доверительного интервала по заданной надежности?
20. Как одновременно учитывать систематические и случайные ошибки измерения?
21. Как рассчитать погрешность прямого измерения?
22. Как рассчитать погрешность косвенного измерения?
23. Как округлять погрешность результата?
24. Как правильно записать результат измерений?

Графики

25. Как правильно выбрать масштаб графика?
26. Как оформляется график?
27. В каких случаях нужен функциональный масштаб и как его выбрать?
28. Как провести линию по точкам наилучшим образом и оценить погрешность?
29. Как по графику определить тангенс угла наклона прямой?
30. Метод наименьших квадратов и его применение.

Литература

1. Зейдель А. Н. Элементарные оценки ошибок измерения. М.: Наука, 1967
2. Розанов Ю. А. Лекции по теории вероятностей. М.: Наука, 1968
3. Гольдин Л. Л. и др. Лабораторные занятия по физике. М.: Наука, 1983
4. Болотина К. С. , Щербакова П. П. Лабораторный практикум по курсу «Физика. Механика и молекулярная физика». М.:МЭИ, 1991
5. Бурсиан Э. В. Задачи по физике для компьютера. М.:Просвещение,1991
6. Муркин Л. П. , Мышкина Н. В. Практические рекомендации по обработке результатов измерений. Самара: СГАУ, 1992
7. Абдульманов Р. Р. Маркелов А. А. Оценка погрешностей результатов лабораторных измерений. Самара: СГАУ, 1997
8. Абдульманов Р. Р. Простой способ расчета погрешностей лабораторных измерений. В кн.: Повышение качества подготовки кадров без отрыва от производства в современных условиях, с. 221-224.: Оренбург, 2004